



Département de Mathématiques d'Orsay



Partie II

Analyse Complexe

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

Table des matières

V. Fonctions entières et produits infinis	4
1. Introduction	4
2. Formule de Jensen	5
3. Produits infinis	9
4. Formule de produit d'Euler pour la fonction sinus	15
5. Formule produit d'Euler pour les nombres premiers	18
6. Produits infinis de Weierstrass	20
7. Théorème de factorisation de Hadamard	23
8. Démonstration du lemme-clé	27
9. Exercices	31
VI. Fonction Gamma d'Euler et fonction zêta de Riemann	32
1. Introduction	32
2. La fonction $\Gamma(z)$	32
3. La fonction $\zeta(s)$	41
4. Exercices	45
VII. Théorème des nombres premiers	46
1. Introduction	46
2. Sept lemmes capitaux	46
3. Démonstration du théorème analytique	52
4. Exercices	55
XII. Théorème de l'application conforme de Riemann	56
1. Introduction	56
2. Théorèmes d'inversion locale et globale dans $\mathbb{R}^2$	56
3. Inversion holomorphe	58
4. Forme normale locale d'une fonction holomorphe	61
5. Multiplicités locales et théorème de l'application ouverte	62
6. Fonctions holomorphes injectives : théorème fondamental	64
7. Équivalence entre le disque unité $\mathbb{D}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$	65
8. Lemme de Schwarz	67

9. Automorphismes du disque unité	68
10. Présentation du théorème de Riemann	70
11. Théorème de Montel pour les familles uniformément bornées et continues	72
12. Démonstration du Théorème de Montel	74
13. Préservation de l'injectivité à la limite	80
14. Démonstration du théorème de Riemann	82
15. Exercices	87
XIII. Examens corrigés	88
3. Examen 2	88
4. Corrigé de l'examen 2	93

Fonctions entières et produits infinis

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les fonctions holomorphes *entières*, à savoir celles qui sont définies sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C}$ consistant en le plan complexe tout entier.

D'après le principe des zéros isolés, toute $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non identiquement nulle ne peut s'annuler que sur une collection de points n'ayant aucun point d'accumulation dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, si l'ensemble :

$$Z(f) := \{a \in \mathbb{C} : f(a) = 0\},$$

est de cardinal infini, il consiste nécessairement en une suite $\{a_n\}_{n=1}^\infty = Z(f)$ de points tendant vers :

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|.$$

Inversement, étant donné une suite quelconque $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ de points dans $\mathbb{C}$, existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ qui s'annule en ces points et nulle part ailleurs ? Le théorème de Weierstrass affirme que la réponse est *oui*, à condition de corriger le produit naïf :

$$(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3) \cdots$$

par des facteurs appropriés afin de le rendre convergent.

Autre question : comment les fonctions holomorphes entières croissent-elles à l'infini ? Ici, la théorie va illustrer un principe général important : plus la croissance est grande, plus il peut y avoir de zéros.

D'ailleurs, ce principe se manifeste déjà clairement dans le cas simple des polynômes :

$$P(z) = a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + \cdots + a_d \quad (a_0 \neq 0),$$

de croissance à l'infini :

$$\max_{|z|=R} |P(z)| \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} |a_0| R^d,$$

et qui possèdent un nombre de zéros (comptés avec multiplicité) gouverné par cette croissance, d'après le théorème fondamental de l'algèbre.

Pour les fonctions entières générales (non nécessairement polynomiales), c'est la *formule de Jensen*, par laquelle nous allons commencer, qui va ouvrir un accès à des informations sur leurs zéros.

Introduisons alors la fonction :

$$\begin{aligned} g(z) &:= \frac{f(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_L)} \\ &= \frac{f(z)}{(z - w_1)^{m_1} \cdots (z - w_K)^{m_K}}, \end{aligned}$$

définie et holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_L\} = \Omega \setminus \{w_1, \dots, w_K\}$. Mais comme on a au voisinage de chaque zéro :

$$f(z) = (z - w_k)^{m_k} [\alpha_k + O(z - w)] \quad (1 \leq k \leq K),$$

avec $\alpha_k \neq 0$, il est clair que g n'a que des singularités illusoires en les w_k , donc :

$$g \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \text{avec} \quad g(z_1) \neq 0, \dots, g(z_L) \neq 0,$$

et comme ni le numérateur de g , ni son dénominateur ne s'annulent ailleurs, nous déduisons que :

$$g|_{\mathbb{D}_R \cup C_R} \neq 0 \quad (\text{partout}).$$

Grâce à l'observation préliminaire, *en récrivant* :

$$f(z) = g(z) (z - z_1) \cdots (z - z_L),$$

il suffit d'établir la formule pour deux types de fonctions.

Assertion 2.3. *Si une fonction g , holomorphe dans un voisinage ouvert de $\mathbb{D}_R \cup C_R$, ne s'annule jamais, alors :*

$$\log |g(0)| = 0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(R e^{i\theta})| d\theta.$$

Démonstration. Soit $R' > R$ assez proche avec $\mathbb{D}_{R'} \supset \mathbb{D}_R \cup C_R$ et avec $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_{R'})$ jamais nulle dans $\mathbb{D}_{R'}$. Puisque $\mathbb{D}_{R'}$ est simplement connexe, un théorème déjà vu fournit un « logarithme » de g , à savoir une fonction $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_{R'})$ telle que :

$$g(z) = e^{h(z)}.$$

Il vient :

$$|g(z)| = e^{\operatorname{Re} h(z)},$$

puis :

$$\log |g(z)| = \operatorname{Re} h(z),$$

et la formule de la moyenne (2.1) conclut. □

Assertion 2.4. *Pour $w \in \mathbb{D}_R$ quelconque, la fonction $f(z) := z - w$ satisfait :*

$$\log |w| = \log \frac{|w|}{R} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |R e^{i\theta} - w| d\theta.$$

Notons que le membre de gauche est bien $\log |f(0)|$ ici.

Démonstration. Écrivons à droite $R \left(e^{i\theta} - \frac{w}{R} \right)$:

$$\log |w| \stackrel{?}{=} \log |w| - \log R + \log R + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| e^{i\theta} - \frac{w}{R} \right| d\theta,$$

simplifions, et renommons $a := \frac{w}{R}$ pour demander si on a bien :

$$\begin{aligned}
 0 &\stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\theta} - a| d\theta \\
 [|e^{i\theta}| = 1] \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 - a e^{-i\theta}| d\theta \\
 [\theta \mapsto -\theta] \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 - a e^{i\theta}| d\theta \quad (\forall |a| < 1)?
 \end{aligned}$$

Mais oui ! Car la fonction holomorphe :

$$g(z) := 1 - a z,$$

jamais nulle dans $\{|z| \leq 1\}$, satisfait les hypothèses de l'Assertion précédente, où $R = 1$, avec $\log |g(0)| = \log 1 = 0$. $\square$

Ceci conclut la démonstration du Théorème 2.2. $\square$

Maintenant, toujours dans un disque $\mathbb{D}_R = \mathbb{D}_R(0)$ de rayon $0 < R < \infty$, sur tout sous-disque ouvert $0 \in \mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_R$ de rayon intermédiaire $0 < r < R$, introduisons une notation pour toute $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$ avec $f \not\equiv 0$:

$$\begin{aligned}
 n_f(r) &:= \text{nombre de zéros de } f \text{ dans } \mathbb{D}_r \\
 &\quad \text{comptés avec multiplicité.}
 \end{aligned}$$

De manière dynamique, il faut s'imaginer que les disques $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_R$ croissent, et voir $r \mapsto n_f(r)$ comme une *fonction* à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Observation 2.5. La fonction $r \mapsto n_f(r)$ est croissante. $\square$

En termes de fonctions indicatrices, lorsque $R < \infty$, en supposant comme dans le Théorème 2.2 que f n'a qu'un nombre fini $L \geq 0$ de zéros $z_1, \dots, z_L \in \mathbb{D}_R$, on a :

$$(2.6) \quad n_f(r) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ |z_\ell| < r}}^L 1 = \sum_{\ell=1}^L \mathbf{1}_{|z_\ell|, \infty[}(r),$$

et donc nous pouvons transformer comme suit la somme dans le membre de droite de la formule de Jensen (affectée d'un signe moins) :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^L \log \frac{R}{|z_\ell|} &= \sum_{\ell=1}^L \int_{|z_\ell|}^R \frac{dr}{r} \\
 &= \sum_{\ell=1}^L \int_0^R \mathbf{1}_{|z_\ell|, \infty[}(r) \frac{dr}{r} \\
 &= \int_0^R \left(\sum_{\ell=1}^L \mathbf{1}_{|z_\ell|, \infty[}(r) \right) \frac{dr}{r} \\
 [\text{Reconnaître (2.6)}] \quad &= \int_0^R n_f(r) \frac{dr}{r}.
 \end{aligned}$$

Théorème 2.7. [Réexpression de Jensen] Pour $f \in \mathcal{O}(\Omega \supset \mathbb{D}_R \cup C_R)$ avec $f(0) \neq 0$ et $f|_{C_R} \neq 0$, on a :

$$\int_0^R n_f(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|. \quad \square$$

Intuitivement, pour $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ holomorphe entière, en considérant que la constante terminale $-\log |f(0)|$ devient négligeable, lorsque $R \rightarrow \infty$, cette égalité s'interprète comme établissant une relation entre le nombre de zéros, à gauche, et la « croissance », à droite.

Afin de préciser ce qu'on peut entendre par *croissance*, voici un concept — parmi d'autres.

Définition 2.8. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ a un ordre de croissance $\leq \rho$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, s'il existe deux constantes $0 \leq A, B < \infty$ telles que :

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho} \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

L'ordre de croissance ρ_f de f est alors le plus petit de ces ρ :

$$\rho_f := \inf \rho.$$

Il peut être infini — penser à e^{e^z} —, mais nous n'étudierons que les cas où $\rho_f < \rho < \infty$. Par exemple, e^z est d'ordre 1 (exercice), et e^{z^2} d'ordre 2 (exercice).

Le premier résultat intéressant de la théorie majore le nombre de zéros en termes de la croissance.

Théorème 2.9. Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ a un ordre de croissance $\leq \rho < \infty$, alors il existe une constante $0 \leq C < \infty$ telle que :

$$n_f(r) \leq C r^\rho \quad (\forall r \geq 1).$$

De plus, si $z_1, z_2, z_3, \dots$ sont tous les zéros non nuls de f , alors pour tout $\rho' > \rho$:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\ell|^{\rho'}} < \infty.$$

Le cas où f n'a qu'un nombre fini de zéros, voire n'a aucun zéro, est inclus dans cet énoncé, mais devient trivial.

De plus, un zéro éventuel de f à l'origine ne perturbe rien, puisque l'objet d'étude est le comportement de f sur $\mathbb{D}_r$ quand $r \rightarrow \infty$.

Démonstration. Soit $\nu := \nu_f(0)$ l'ordre de f à l'origine, d'où :

$$f(z) = z^\nu (\alpha + O(z)),$$

avec $\alpha \neq 0$. Si nous introduisons la fonction :

$$F(z) := \frac{f(z)}{z^\nu \alpha},$$

il vient :

$$n_F(r) = n_f(r) - \nu,$$

décalage par une constante devenant invisible quand $r \rightarrow \infty$, quitte à augmenter la constante C de la majoration du théorème. Nous pouvons donc supposer que :

$$f(0) = 1.$$

L'idée-clé est d'écrire la formule de Jensen — au centre ! — pour $R = 2r$:

$$\begin{aligned}
 n_f(r) \log 2 &= n_f(r) [\log(2r) - \log(r)] \\
 &= n_f(r) \int_r^{2r} \frac{ds}{s} \\
 \text{[Croissance]} \quad &\leq \int_r^{2r} n_f(s) \frac{ds}{s} \\
 \text{[Jensen]} \quad &\leq \int_0^{2r} n_f(s) \frac{ds}{s} + \underbrace{\log |f(0)|}_o = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(2re^{i\theta})| d\theta \\
 \text{[Hypothèse]} \quad &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |A e^{B|2r|^\rho}| d\theta \\
 &= \frac{2\pi}{2\pi} (\log A + B 2^\rho r^\rho) \\
 &\leq \text{constante} \cdot r^\rho,
 \end{aligned}$$

$[\forall r \geq 1]$

et l'inégalité entre membres extrêmes donne bien $n_f(r) \leq C r^\rho$.

Ensuite, puisque tous les zéros z_ℓ , $\ell = 1, 2, 3, \dots$ de f sont non nuls, avec $\rho' > \rho$ qui garantit :

$$2^{\rho' - \rho} > 1,$$

l'idée-clé est de décomposer $\{|z| \geq 1\}$ en anneaux dyadiques successifs afin de majorer pour conclure :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\ell|^{\rho'}} &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{2^j \leq |z_\ell| < 2^{j+1}} \frac{1}{|z_\ell|^{\rho'}} \right) \\
 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} n_f(2^{j+1}) \frac{1}{(2^j)^{\rho'}} \\
 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} C 2^{(j+1)\rho} \frac{1}{2^{j\rho'}} \\
 &= C 2^\rho \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{\rho' - \rho})^j} \\
 &= C 2^\rho \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\rho' - \rho}}} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

□

3. Produits infinis

Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite quelconque de nombres complexes $a_n \in \mathbb{C}$. Dans l'étude des séries infinies $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, il est bien connu que la convergence nécessite que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, parfois rapidement. De manière analogue, si on souhaite élaborer une théorie des *produits* infinis convergents :

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n,$$

on s'attend à ce que les b_n tendent (rapidement) vers 1 — sinon le produit divergera ! C'est pourquoi on écrira dorénavant $b_n = 1 + a_n$, en ayant en tête que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Définition 3.1. Si la limite :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n) =: \ell,$$

existe dans $\mathbb{C}$, on dit que le produit infini des $1 + a_n$ *converge*, et on le note :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

Les propriétés spéciales du nombre 0 relativement à la multiplication entraînent pour les produits infinis quelques particularités qui n'ont pas de contrepartie pour les séries : si $1 + a_n = 0$ pour un certain n , on a $\prod_{n=1}^N (1 + a_n) = 0$ dès que $N \geq n$, d'où la convergence triviale $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = 0$.

Ensuite, en abrégant :

$$B_N := \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \quad (N \geq 1),$$

lorsque le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \ell \in \mathbb{C}^*$ converge vers une limite *non nulle*, il est clair que :

$$1 + a_N = \frac{B_N}{B_{N-1}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{\ell}{\ell} = 1,$$

et ainsi, une condition nécessaire pour la convergence dans $\mathbb{C}^*$ est que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Comme la fonction logarithme transforme un produit en une somme, et comme $\log(1 + z) \approx z$ pour $z \in \mathbb{C}$ petit :

$$\begin{aligned} \log \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) \\ &\approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \end{aligned}$$

on pourrait croire que la convergence d'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ équivaut à la convergence de la série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mais l'Exercice 1 montre qu'il n'en est rien :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \not\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \text{ converge}.$$

De plus, dans la théorie des produits infinis, on souhaite absolument préserver la propriété suivante des produits finis :

« Pour qu'un produit de nombres complexes soit nul, il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit nul. »

Cependant, l'exemple des facteurs tous différents de zéro :

$$1 + a_n := 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad (n \geq 1),$$

montre, par télescopage, que :

$$B_N = \prod_{n=1}^N (1 + a_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N+1} = \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui montre qu'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ peut converger, *vers zéro, mais sans qu'aucun de ses facteurs soit nul*.

D'ailleurs, ce — mauvais, très mauvais — exemple pour lequel :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = -\infty,$$

montre aussi incidemment que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \not\iff \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \text{ converge},$$

et donc aucune implication n'est vraie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \not\iff \not\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \text{ converge}!$$

Toutefois, l'intuition qu'un passage par le logarithme permet de ramener l'étude des produits infinis à celle des séries est correcte, à condition d'imposer la convergence *absolue*, laquelle s'avère être la condition suffisante la plus utile dans toutes les applications.

Théorème 3.2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, alors le produit infini :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \in \mathbb{C}$$

converge vers une valeur finie. De plus :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = 0 \iff \exists n \geq 1, \quad 1 + a_n = 0.$$

Démonstration. Comme $|a_n| \rightarrow 0$ nécessairement, pour n assez grand, on a $|a_n| \leq \frac{1}{2}$. En éliminant les premiers facteurs du produit infini, on peut supposer que $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$. Puisque seuls ces premiers facteurs pouvaient donc satisfaire $1 + a_n = 0$, nous allons voir que, en fait, la limite :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

existe et est *non nulle*. Autrement dit, un produit infini convergent ne peut valoir 0 que si l'un de ses *premiers* facteurs est nul.

En effet, avec le développement connu en série entière valable pour $|z| < 1$:

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \cdots,$$

si de plus $|z| \leq \frac{1}{2}$, on peut majorer :

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad |\log(1+z)| &\leq |z| \left(1 + |z| + |z|^2 + |z|^3 + |z|^4 + \dots\right) \\
 &\leq |z| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots\right) \\
 &= 2|z|,
 \end{aligned}$$

pour assurer la convergence de la série :

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\log(1+a_n)| \\
 &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \\
 &\stackrel{[\text{Hypothèse}]}{<} \infty,
 \end{aligned}$$

vers un nombre que l'on note :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \log(1+a_n) =: \ell,$$

et comme l'exponentielle est continue :

$$\begin{aligned}
 \prod_{n=1}^N (1+a_n) &= \prod_{n=1}^N e^{\log(1+a_n)} \\
 &= e^{\sum_{n=1}^N \log(1+a_n)} \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{\ell} \neq 0,
 \end{aligned}$$

ceci montre bien la convergence des produits partiels vers un nombre qui est effectivement *non nul*, parce qu'il est exponentielle d'un nombre complexe. $\square$

Ce critère de convergence *absolue* $\sum |a_n| < \infty$ est en effet approprié, car la plupart du temps, dans la théorie des fonctions holomorphes, on est en mesure, au moyen d'estimations souvent élémentaires, de garantir une convergence normale — donc uniforme — des séries de fonctions, ce qui préserve le caractère holomorphe de la limite.

Théorème 3.4. *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions holomorphes $F_n \in \mathcal{O}(\Omega)$. S'il existe des constantes $c_n > 0$ majorant dans Ω :*

$$|F_n(z) - 1| \leq c_n \quad \text{telles que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

alors les trois propriétés suivantes sont satisfaites.

(1) *Le produit infini de fonctions holomorphes $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ converge uniformément dans Ω vers une fonction holomorphe :*

$$F(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N F_n(z).$$

(2) *En un point $w \in \Omega$, on a $F(w) = 0$ si et seulement si il existe $n = n_w \geq 1$ avec $F_n(w) = 0$.*

(3) Si toutes les $F_n \neq 0$ ne s'annulent nulle part dans Ω , alors $F \neq 0$ aussi partout dans Ω , et de plus :

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'_n(z)}{F_n(z)}.$$

Démonstration. Puisque $c_n \rightarrow 0$ nécessairement, il existe un entier $M \geq 1$ assez grand pour que :

$$n \geq M + 1 \implies c_n \leq \frac{1}{2}.$$

En décomposant alors :

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z) = \prod_{n=1}^M F_n(z) \prod_{n=M+1}^{\infty} F_n(z),$$

nous allons constater que le deuxième produit-reste ne s'annule en *aucun* point de Ω , et donc les zéros de la fonction-limite ne peuvent être présents que dans les premiers facteurs :

$$\{w \in \Omega : F(w) = 0\} = \bigcup_{1 \leq n \leq M} \{w \in \Omega : F_n(w) = 0\}.$$

En éliminant ces premiers facteurs, ce qui ne change rien à **(1)**, **(2)**, **(3)**, nous nous ramenons à $c_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

Maintenant, en homologie avec les notations précédentes, récrivons :

$$F_n(z) =: 1 + a_n(z).$$

Puisque $|a_n(z)| \leq c_n \leq \frac{1}{2}$ dans Ω , l'hypothèse $\sum c_n < \infty$, suivie de l'estimation de convergence normale-uniforme :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n(z)) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \log(1 + a_n(z)) \right| \\ \text{[(3.3)]} \quad &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z)| \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty, \end{aligned}$$

associée à un théorème connu (spectaculaire) de Cauchy offre l'holomorphie de la fonction-série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n(z)) \in \mathcal{O}(\Omega),$$

donc :

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n(z)) = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n(z))} \in \mathcal{O}(\Omega),$$

et cette fonction holomorphe ne s'annule en aucun point de Ω — car c'est une exponentielle ! —, ce qui conclut **(1)**.

Pour l'équivalence **(2)**, on a ici :

$$\emptyset = \{w \in \Omega : F(w) = 0\},$$

ce qui est cohérent avec le fait que nous nous sommes ramenés à $c_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$, de telle sorte que les inégalités $|F_n(z) - 1| \leq \frac{1}{2}$ forçaient, à l'avance aussi :

$$\emptyset = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{w \in \Omega : F_n(w) = 0\}.$$

Pour (3), en notant :

$$G_N(z) := \prod_{n=1}^N F_n(z) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{uniformément}} F(z) \quad (\text{dans } \Omega),$$

un théorème connu (encore plus spectaculaire) de Cauchy offre la convergence des dérivées en tout point :

$$G'_N(z) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} F'(z) \quad (\forall z \in \Omega).$$

Mais les G_N sont uniformément minorées dans Ω , car $|F_N(z) - 1| \leq c_n \leq \frac{1}{2}$ donne :

$$\begin{aligned} |G_N(z)| &= \prod_{n=1}^N |F_n(z)| \\ &\geq \prod_{n=1}^N (1 - c_n) \\ &\geq \prod_{n=1}^{\infty} (1 - c_n) \\ &> 0, \end{aligned}$$

[Théorème 3.2]

donc on a aussi en tout point convergence :

$$\frac{1}{F(z)} \xleftarrow[\infty \leftarrow N]{} \frac{1}{G_N(z)},$$

d'où la conclusion de (3) :

$$\begin{aligned} \frac{F'(z)}{F(z)} &\xleftarrow[\infty \leftarrow N]{} \frac{G'_N(z)}{G_N(z)} \\ &= \frac{(F_1(z) \cdots F_N(z))'}{F_1(z) \cdots F_N(z)} = \frac{F'_1(z)}{F_1(z)} + \cdots + \frac{F'_N(z)}{F_N(z)}. \end{aligned} \quad \square$$

Ainsi, la bonne condition suffisante pour la convergence d'un *produit* infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$, c'est la convergence normale de la *série* de fonctions holomorphes $\sum_{n=1}^{\infty} (F_n(z) - 1)$.

Conceptualisons cela, quitte à nous restreindre à des compacts.

Définition 3.5. Un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ de fonctions holomorphes $F_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ est dit *normalement convergent sur les compacts* de Ω si, pour tout sous-ensemble compact $K \subset \Omega$, il existe une suite $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres positifs $c_n = c_n(K) \geq 0$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ tels que :

$$|F_n(z) - 1| \leq c_n \quad (\forall z \in K, \forall n \geq 1).$$

On généralise alors aisément le théorème précédent.

Théorème 3.6. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, si une suite $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions holomorphes $F_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ converge uniformément sur les compacts de Ω , alors :

(1) le produit infini $\prod_{n=1}^\infty F_n(z)$ définit une fonction holomorphe dans Ω :

$$F(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N F_n(z);$$

(2) en un point $w \in \Omega$, on a $F(w) = 0$ si et seulement si il existe $n = n_w \geq 1$ avec $F_n(w) = 0$;

(3) si toutes les $F_n \neq 0$ ne s'annulent nulle part dans Ω , alors $F \neq 0$ aussi partout dans Ω , et de plus :

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{F'_n(z)}{F_n(z)}. \quad \square$$

4. Formule de produit d'Euler pour la fonction sinus

Avant de continuer à développer la théorie générale des produits de Weierstrass, établissons une formule de produit infini pour la fonction sinus, due à Euler :

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

qui est valable pour *tout* $z \in \mathbb{C}$.

Cette identité sera déduite de la représentation suivante de la fonction cotangente comme série de fractions rationnelles :

$$\begin{aligned} \pi \cotan \pi z &= \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \\ &= \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{z+n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+n} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2z}{z^2 - n^2}, \end{aligned}$$

qui sera valable pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. En fait, la somme $\sum_{n=-\infty}^\infty$ doit être entendue comme limite, lorsque $N \rightarrow \infty$, de la somme symétrique $\sum_{n=-N}^N$, parce que aucune *moitié-somme* $\sum_{n=-\infty}^0$ et $\sum_{n=0}^\infty$ ne converge, à cause de $\sum \frac{1}{n} = \infty$.

Heureusement, quand on interprète la somme de manière symétrique, des compensations réalisées dans la dernière formule écrite ci-dessus vont assurer la convergence.

Théorème 4.1. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\pi \cotan \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Démonstration. L'idée est d'exploiter le fait que cette série et la fonction $\pi \cotan \pi z$ ont les mêmes propriétés structurales. Notamment, avec $n \in \mathbb{Z}$ entier, et $z = n + w$ proche mais différent de n , donc avec $w \neq 0$ petit, comme on a :

$$\begin{aligned} \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} &= \pi \frac{\cos(\pi n + \pi w)}{\sin(\pi n + \pi w)} = \pi \frac{(-1)^n \cos \pi w}{(-1)^n \sin \pi w} \\ &= \pi \frac{1 + O(w^2)}{\pi w + O(w^3)} = \frac{1}{z - n} + \text{reste holomorphe}, \end{aligned}$$

il est clair que les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

- (1) $\pi \frac{\cos \pi(z+1)}{\sin \pi(z+1)} = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$;
 (2) $\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ possède des pôles simples en tous les entiers $z = n \in \mathbb{Z}$, avec des résidus tous égaux à 1, et est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Alors nous affirmons que la série :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z + n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z + n}$$

satisfait aussi exactement ces deux mêmes propriétés.

En effet, (1) revient simplement à observer que le passage de z à $z + 1$ décale d'une unité les termes de la somme infinie :

$$\sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z + 1 + n} = -\frac{1}{z - N} + \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z + n} + \frac{1}{z + N + 1},$$

et en faisant $N \rightarrow \infty$, les termes d'erreur parasites s'évanouissent :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z + 1 + N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z + n}.$$

Par conséquent, la fonction-différence :

$$\Delta(z) := \pi \cotan \pi z - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z + n}$$

satisfait, via (1), la périodicité $\Delta(z + 1) = \Delta(z)$, mais surtout, grâce à (2), nous constatons que toutes les singularités de $\Delta(z)$ en les entiers $z = n \in \mathbb{Z}$ sont illusoires, ce qui implique :

$$\Delta \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$

Enfin, on vérifie l'imparité :

$$\Delta(-z) = -\Delta(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Afin d'établir la formule du théorème, qui équivaut à $\Delta(z) \equiv 0$, commençons par une

Assertion 4.2. *La fonction $\Delta \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est bornée dans le plan complexe tout entier.*

Preuve. Grâce à la 1-périodicité, il suffit de faire voir que Δ est bornée dans la bande infinie verticale :

$$\{|x| \leq \tfrac{1}{2}\} \quad (z = x + iy),$$

et grâce à l'imparité, il suffit de le faire dans le rectangle infini :

$$\{|x| \leq \tfrac{1}{2}, y \geq 0\}.$$

Comme Δ est partout holomorphe, elle est bornée sur le carré $\{|x| \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1\}$, donc on peut supposer $y > 1$, et alors on majore premièrement :

$$\begin{aligned}
 |\pi \cotan \pi z| &= \left| \pi i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \\
 &= \pi \left| \frac{e^{-2\pi y} + e^{-2i\pi x}}{e^{-2\pi y} - e^{-2i\pi x}} \right| \\
 [\frac{1}{|a-b|} \leq \frac{1}{-|a|+|b|} \text{ quand } |b| > |a|] &\leq \pi \frac{e^{-2\pi y} + 1}{-e^{-2\pi y} + 1} \\
 &\leq \pi \frac{e^{-2\pi} + 1}{-e^{-2\pi} + 1} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Deuxièmement, toujours avec $y > 1$ et avec $|x| \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| &\leq \left| \frac{1}{x + iy} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2(x + iy)}{x^2 - y^2 - n^2 + 2i xy} \right| \\
 &\leq \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y}{y^2 + n^2 - x^2} \\
 &\leq 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2 - \frac{1}{4}} \\
 [u > 1 \Rightarrow \frac{1}{u - \frac{1}{4}} < \frac{2}{u}] &\leq 1 + 2 \cdot 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2}.
 \end{aligned}$$

Or comme la fonction $x \mapsto \frac{y}{y^2 + x^2}$ est décroissante, cette dernière somme est majorée par une intégrale finie indépendante de y :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2} &\leq \int_0^{\infty} \frac{y}{y^2 + x^2} dx \\
 [x = yt] &= \int_0^{\infty} \frac{y}{y^2 + y^2 t^2} y dt \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, les deux constituants de la fonction-différence Δ sont bel et bien bornés. $\square$

Pour terminer, le théorème de Liouville force $\Delta \equiv C$ à être constante, et puisqu'elle est impaire, $C = 0$, ce qui conclut :

$$0 \equiv \pi \cotan \pi z - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z + n}. \quad \square$$

Comme promis, nous pouvons maintenant établir le célèbre :

Théorème 4.3. [Euler] *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a la représentation par un produit infini convergent :*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Démonstration. Abrégeons :

$$G(z) := \frac{\sin \pi z}{\pi} \quad \text{et} \quad P(z) := z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$, le Théorème 3.4 montre que ce produit infini converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, et que en-dehors de l'ensemble $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Mais comme $\frac{G'(z)}{G(z)} = \pi \cotan \pi z$, le développement en série rationnelle de la fonction cotangente que nous venons d'obtenir montre l'annulation identique :

$$\begin{aligned} \left(\frac{P(z)}{G(z)}\right)' &= \frac{P(z)}{G(z)} \left[\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{G'(z)}{G(z)} \right] \\ &\equiv 0, \end{aligned}$$

et donc $P(z) = c G(z)$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{C}$. Enfin, puisque $P(z) = z + O(z^2)$ et $G(z) = \frac{\pi z}{\pi} + O(z^3)$, il est clair que $c = 1$. $\square$

5. Formule produit d'Euler pour les nombres premiers

La fonction zêta de Riemann est définie, pour $s > 1$ réel, par la série :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

convergente d'après un critère connu, et elle se prolonge au domaine complexe.

Lemme 5.1. *Cette série $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur tout demi-plan complexe :*

$$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1 + \delta\},$$

avec $\delta > 0$ quelconque, et définit une fonction holomorphe dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$.

Démonstration. Comme Rieman, écrivons le nombre complexe s sous la forme :

$$s = \sigma + it,$$

avec $\sigma, t \in \mathbb{R}$, d'où en supposant $\sigma > 1 + \delta$:

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^s|} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|e^{s \log n}|} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sigma \log n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} < \infty, \end{aligned}$$

ce qui établit la convergence normale, dans $\{\operatorname{Re} s > 1 + \delta\}$, de cette série de fonctions holomorphes. Le théorème de Cauchy garantit alors que $s \mapsto \zeta(s)$ est holomorphe dans tout demi-plan $\{\operatorname{Re} s > 1 + \delta\}$, donc dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$, puisque $\delta > 0$ peut être choisi arbitrairement petit. $\square$

Une application célèbre de la théorie des produits infinis est due à Euler. Elle établit un lien extrêmement profond avec la théorie des nombres. Notons :

$$\mathcal{P} := \{p \geq 2 \text{ entiers premiers}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}.$$

Théorème 5.2. [Euler] Pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} s > 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

où le produit infini est normalement convergent dans tout demi-plan $\{\operatorname{Re} s > 1 + \delta\}$ avec $\delta > 0$ quelconque.

Démonstration. Commençons par justifier la convergence de ce produit infini. Avec $z := \frac{1}{p^s}$ qui vérifie $0 < |z| < \frac{1}{2}$ car $p \geq 2$, en utilisant :

$$\left| \frac{1}{1-z} \right| \leq \frac{1}{1-|z|} \leq 1 + 2|z|,$$

majorons le produit infini par :

$$\left| \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right| \leq \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{2}{|p^s|} \right) < \infty,$$

et constatons que le critère suffisant du Théorème 3.4 pour la convergence des produits infinis s'applique grâce à :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{2}{|p^s|} = 2 \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^{\operatorname{Re} s}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} < \infty.$$

Ensuite, soient deux (grands) entiers $1 \leq N \leq M$. Puisque d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, tout entier $n \leq N$ s'écrit de manière unique $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_{\mu}^{\alpha_{\mu}}$ avec $p_1, \dots, p_{\mu} \in \mathcal{P}$, avec $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu} \geq 1$, et avec :

$$p_1, \dots, p_{\mu} \leq N, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{\mu} \leq N \leq M,$$

un développement du produit à droite de la première ligne ci-dessous donne une majoration :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} &\leq \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq N}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{Ms}} \right) \\
 &\leq \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq N}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{Ms}} + \cdots \right) \\
 &= \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq N}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \\
 &\leq \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.
 \end{aligned}$$

En faisant $N \rightarrow \infty$, il vient :

$$\zeta(s) \leq \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Pour l'inégalité inverse, à nouveau d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, un développement du produit à gauche montre qu'on n'obtient pas tous les $\frac{1}{n^s}$:

$$\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq N}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p^{Ms}} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

d'où en faisant $M \rightarrow \infty$:

$$\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq N}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \leq \zeta(s),$$

et enfin via $N \rightarrow \infty$:

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \leq \zeta(s). \quad \square$$

6. Produits infinis de Weierstrass

Rappelons que si une fonction holomorphe non identiquement nulle $f(z)$ s'annule en un point $z = a$, la multiplicité $\nu_f(z) =: \nu$ est l'unique entier tel que l'on puisse factoriser :

$$f(z) = (z - a)^\nu g(z),$$

avec une fonction-reste holomorphe $g(z)$ satisfaisant $g(a) \neq 0$. On voit cela instantanément en factorisant la puissance maximale de $z - a$ dans le développement en série entière de f au point a .

Maintenant, si $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite quelconque (infinie) de points dans $\mathbb{C}$, existe-t-il une fonction holomorphe entière $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ayant exactement ces a_n comme zéros, et non nulle ailleurs ? À cause du principe des zéros isolés, il est nécessaire de supposer que $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ n'a pas de point d'accumulation à distance finie, et donc que $|a_n| \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Après réordonnancement, on pourrait supposer que $|a_n| \leq |a_{n+1}|$ pour tout $n \geq 1$, mais cela n'est pas nécessaire.

Rappelons que nous autorisons des répétitions dans les suites de zéros, et donc il revient au même de se donner une suite $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ de points mutuellement distincts avec $|b_n| \rightarrow \infty$,

des multiplicités $\nu_n \geq 1$, et de demander s'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ayant ces b_n comme zéros d'ordres ν_n , et jamais nulle sur $\mathbb{C} \setminus \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$.

Cette question est triviale pour un nombre fini de zéros prescrits, et pour un nombre infini, la réponse est toujours positive, aussi.

Théorème 6.1. [Weierstrass] *Pour toute suite $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ de nombres complexes $a_n \in \mathbb{C}$ satisfaisant $|a_n| \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, il existe $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ holomorphe entière s'annulant en tous les $z = a_n$, et non nulle ailleurs.*

Toute autre fonction $\tilde{f}(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ satisfaisant cela est de la forme :

$$\tilde{f}(z) = f(z) e^{g(z)},$$

avec $g(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ holomorphe entière.

Démonstration. En effet, si a_n est un zéro prescrit, disons d'ordre 1 pour fixer les idées, alors au voisinage de $z = a_n$, on peut écrire :

$$f(z) = (z - a_n) [\alpha + O(z - a_n)] \quad (\alpha \neq 0),$$

$$\tilde{f}(z) = (z - a_n) [\tilde{\alpha} + O(z - a_n)] \quad (\tilde{\alpha} \neq 0),$$

d'où il découle que $z = a_n$ est une singularité illusoire du quotient :

$$\frac{\tilde{f}(z)}{f(z)} = \frac{(z - a_n) [\tilde{\alpha} + O(z - a_n)]}{(z - a_n) [\alpha + O(z - a_n)]} = \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha} + O(z - a_n),$$

accompagné du fait que $\frac{\tilde{f}(z)}{f(z)}$ ne s'annule pas au voisinage de $z = a_n$.

Le cas où a_n est répété un nombre $m \geq 1$ de fois est similaire, donc :

$$\frac{\tilde{f}(z)}{f(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*)$$

est holomorphe entière, et ne s'annule jamais.

Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, un théorème connu montre qu'il existe bien une fonction holomorphe entière $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ représentant :

$$\frac{\tilde{f}(z)}{f(z)} = e^{g(z)}.$$

Ainsi, nous devons construire une fonction qui s'annule précisément en tous les $z = a_n$. La proposition naïve, suggérée par la formule de produit d'Euler :

$$f(z) \stackrel{?}{=} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

se heurte à un problème de convergence, notamment lorsque $\sum \frac{1}{|a_n|} = \infty$. Afin d'y remédier, Weierstrass a eu l'idée d'insérer des facteurs exponentiels — jamais nuls — accélérant la convergence sans introduire de nouveaux zéros.

Pour chaque entier $k \geq 0$, introduisons en effet les *facteurs canoniques* de Weierstrass :

$$E_0(z) := 1 - z,$$

$$E_k(z) := (1 - z) e^{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k}} \quad (k \geq 1).$$

En localisant autour d'un zéro à prescrire $z = a_n$, nous serons intéressés par l'étude de ces $E_k(z)$ dans le disque $\{|z| \leq \frac{1}{2}\}$.

Lemme 6.2. *Il existe une constante universelle $0 < c < \infty$ telle que, pour tout $k \geq 0$:*

$$|1 - E_k(z)| \leq c |z|^{k+1} \quad (\forall |z| \leq \frac{1}{2}).$$

On peut prendre $c = 2e$, qui est indépendante de k .

Preuve. Pour $|z| \leq \frac{1}{2}$, le logarithme $\log(1 - z)$ est défini par la série connue $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, donc comme on peut écrire $1 - z = e^{\log(1-z)}$, il vient :

$$\begin{aligned} E_k(z) &= e^{\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k}} \\ &=: e^w, \end{aligned}$$

en posant :

$$w := - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Mais puisque $|z| \leq \frac{1}{2}$, nous pouvons majorer de manière élémentaire :

$$\begin{aligned} |w| &\leq |z|^{k+1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{|z|}{k+2} + \frac{|z|^2}{k+3} + \dots \right) \\ &\leq |z|^{k+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \\ &= 2 |z|^{k+1}. \end{aligned}$$

La formule des accroissements finis appliquée à la fonction $h(t) := e^{tw}$ de la variable réelle $0 \leq t \leq 1$ ayant pour dérivée $h'(t) = w e^{tw}$ conclut :

$$\begin{aligned} |1 - E_k(z)| &= |1 - e^w| = |h(0) - h(1)| \\ &= 1 \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} |h'(t)| \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |w| e^{t|w|} \\ &\leq 2 |z|^{k+1} e^{|w|} \\ &\leq 2 e^1 |z|^{k+1}. \end{aligned}$$

$$[|w| \leq 1]$$

□

Supposons dorénavant qu'un zéro d'ordre $\nu \geq 0$ est prescrit en $z = 0$, et que les zéros $a_1, a_2, a_3, \dots$ sont tous non nuls. Définissons alors le *produit de Weierstrass* par :

$$\begin{aligned} f(z) &:= z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \\ &= z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n}, \end{aligned}$$

et vérifions qu'il remplit toutes les conditions, à savoir que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe entière avec un zéro d'ordre ν en $z = 0$, avec des zéros en chaque a_n , et que f est non nulle ailleurs.

Fixons $R > 0$, supposons $z \in \mathbb{D}_R$, et démontrons que toutes ces propriétés sont satisfaites dans $\mathbb{D}_R$. Comme R est arbitraire, cela terminera la démonstration.

Décomposons le produit en deux morceaux :

$$f(z) = z^\nu \prod_{|a_n| \leq 2R} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \prod_{|a_n| > 2R} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Puisque $|a_n| \rightarrow \infty$, il n'y a qu'un nombre fini de facteurs dans le premier produit, lequel s'annule clairement en tous les $z = a_n$ avec $|a_n| < R$, mais nulle part ailleurs dans $\mathbb{D}_R$, ce qu'on voulait.

Dans le deuxième morceau qui est un produit infini, on a, toujours pour $|z| < R$:

$$\left| \frac{z}{a_n} \right| \leq \frac{R}{2R} = \frac{1}{2},$$

et donc le Lemme 6.2 offre une estimation :

$$\begin{aligned} \left| 1 - E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| &\leq c \left| \frac{z}{a_n} \right|^{n+1} \\ &\leq c \frac{1}{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

montrant, puisque $\sum \frac{1}{2^{n+1}} < \infty$, en appliquant le Théorème 3.4, que le produit infini :

$$\prod_{|a_n| > 2R} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \Big|_{\mathbb{D}_R}$$

converge normalement dans le disque $\mathbb{D}_R$ et y définit une fonction holomorphe ne s'annulant jamais.

Au final, f possède toutes les propriétés voulues dans $\mathbb{D}_R$ avec $R > 0$ arbitraire, donc dans $\mathbb{C}$. $\square$

7. Théorème de factorisation de Hadamard

Étant donné une fonction holomorphe entière $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non identiquement nulle qui possède $\nu := \nu_f(0)$ zéros à l'origine suivis d'un nombre *infini* de zéros $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, le Théorème 6.1 de Weierstrass construit un produit infini convergent :

$$\begin{aligned} E(z) &:= z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \\ &= z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - z\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n} \end{aligned}$$

qui a exactement les mêmes zéros que f , sans s'annuler ailleurs, et par conséquent, le quotient :

$$\frac{f(z)}{E(z)}$$

n'a que des singularités illusoires, car si w est un zéro, $w = 0$ ou $w = a_n$, et si m est la multiplicité de ce zéro, $m = \nu$ ou $m =$ nombre de fois que a_n est répété, au voisinage de w , on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - w)^m [\alpha + O(z - w)] & (\alpha \neq 0), \\ E(z) &= (z - w)^m [\beta + O(z - w)] & (\beta \neq 0), \end{aligned}$$

d'où la compensation au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{f(z)}{E(z)} &= \frac{(z-w)^m [\alpha + O(z-w)]}{(z-w)^m [\beta + O(z-w)]} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} + O(z-w) \quad (\frac{\alpha}{\beta} \neq 0),\end{aligned}$$

montrant que $\frac{f(z)}{E(z)}$ est holomorphe, jamais égale à zéro, au voisinage de $z = w$. Comme $f(z) \neq 0 \neq E(z)$ partout ailleurs, ce quotient ne s'annule donc en *aucun* point de $\mathbb{C}$, et comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, un théorème connu permet de représenter ce quotient comme exponentielle :

$$\frac{f(z)}{E(z)} = e^{g(z)},$$

d'une certaine fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ unique.

Corollaire 7.1. [Weierstrass] *Toute $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ayant un zéro d'ordre $\nu \geq 0$ à l'origine et une infinité de zéros $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ non nuls s'écrit de manière unique avec $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$:*

$$f(z) = e^{g(z)} z^\nu \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n}. \quad \square$$

Or quand $n \rightarrow \infty$, dans l'exponentielle, le degré n du polynôme en $\frac{z}{a_n}$ est non borné. Hadamard s'est posé la question de savoir si on peut raffiner ce théorème de représentation de Weierstrass lorsque $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est supposée être d'ordre de croissance *fini* $\leq \rho < \infty$:

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho} \quad (\forall z \in \mathbb{C}),$$

en s'assurant que les deux fonctions $g(z)$ et $Q(\frac{z}{a_n})$ dans les exponentielles soient elles aussi bornées par $C|z|^\rho$, voire éventuellement par $C|z|^{\rho'}$ avec $\rho < \rho' < \infty$.

Ici, rappelons que $\rho_f = \inf \rho$ est l'ordre de f , mais qu'il est souvent plus aisé de travailler avec un $\rho > \rho_f$, éventuellement arbitrairement proche de ρ_f .

Rappelons aussi que nous avons démontré à l'avance deux résultats qui vont s'avérer utiles, la borne supérieure :

$$\begin{aligned}n_f(r) &= \text{nombre de zéros de } f \text{ dans } \mathbb{D}_r \\ &\leq C r^\rho \quad (\forall r \geq 1),\end{aligned}$$

ainsi que la convergence :

$$(7.2) \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{|a_n|^\rho} < \infty,$$

quel que soit $\rho > \rho_f$.

Terminologie 7.3. Pour $k \geq 0$ entier, on appelle *facteur canonique de degré k* la fonction :

$$E_k(z) := (1 - z) e^{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k}}.$$

Rappelons que l'intérêt de ces $E_k(z)$ est qu'ils ont le même zéro que $1 - z$, tout en collant davantage à 1 pour $|z| \leq \frac{1}{2}$ petit, comme l'exprime l'estimée déjà vue $|1 - E_k(z)| \leq c|z|^{k+1}$.

La réponse à la question, positive, s'exprime comme suit.

Théorème 7.4. [Hadamard] Toute $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ avec $f \not\equiv 0$ d'ordre fini $\rho_f < \infty$ ayant un zéro d'ordre $\nu \geq 0$ à l'origine et une infinité de zéros $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ non nuls s'écrit de manière unique comme produit infini convergent :

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{P(z)} z^{\nu} \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \\ &= e^{p_0 + p_1 z + \dots + p_k z^k} z^{\nu} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k}, \end{aligned}$$

où $P(z)$ est un polynôme de degré $\leq k$, avec des facteurs canoniques de degrés constants k , où k est l'unique entier satisfaisant :

$$k \leq \rho_f < k + 1.$$

Le travail le plus exigeant, dans l'argumentation, sera d'établir que le facteur $e^{g(z)}$ est une exponentielle-polynôme de degré contrôlé.

Démonstration. Introduisons :

$$E(z) := z^{\nu} \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Grâce au Lemme 6.2, pour tous les $n \geq N \gg 1$ assez grands afin que $\left|\frac{z}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2}$, on a la majoration :

$$\left|1 - E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq c \left|\frac{z}{a_n}\right|^{k+1} \quad (n \geq N).$$

Quitte à augmenter N , on peut supposer $|a_n| \geq 1$ lorsque $n \geq N$. En intercalant alors un ρ avec $\rho_f < \rho < k + 1$, nous constatons que le critère suffisant du Théorème 3.4 pour la convergence du produit infini $\prod_{n=N}^{\infty}$ est vérifié :

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} \left|1 - E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| &\leq c |z|^{k+1} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \\ &\leq c |z|^{k+1} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho}} \\ [(7.2)] \quad &< \infty. \end{aligned}$$

Clairement, $E(z)$ possède exactement les mêmes zéros que f , et donc, le quotient ne s'annulant jamais :

$$\frac{f(z)}{E(z)} = e^{g(z)},$$

est l'exponentielle d'une certaine fonction holomorphe entière, puisque $\mathbb{C}$ est simplement connexe.

Comment parvenir à démontrer que $g(z) = P(z) \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme de degré $\leq k$?

Le point délicat, ici, est qu'on *divise* par $E(z)$, ce qui peut perturber la croissance $|f(z)| \leq A e^{B|z|^{\rho}}$, voire la détruire, notamment lorsque $z \approx a_n$ est proche d'un zéro de $E(z)$!

L'idée-clé de Hadamard a été d'établir des *minorations* de $|E(z)|$ d'où découlent des *majorations* de $\frac{1}{|E(z)|}$, au moins sur des suites de cercles :

$$\{|z| = r_m\} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

de rayons :

$$1 \leq r_{m-1} < r_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty,$$

ne contenant aucun zéro a_n , cercles qui soient « assez éloignés », en un certain sens, de ces a_n .

Lemme-clé 7.5. [Hadamard] *Il existe une suite de cercles $C_{r_m}(0)$ centrés à l'origine de rayons $1 \leq r_{m-1} < r_m \rightarrow \infty$ tendant vers l'infini en restriction auxquels :*

$$\left| \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \geq e^{-c|z|^\rho} \quad (\forall z \in C_{r_m}, \forall m \geq 1),$$

où $\rho_f < \rho < k + 1$ est arbitrairement proche de ρ_f , pour une constante $0 < c < \infty$ dépendant seulement de f .

La démonstration, technique, étant repoussée à la Section 8 suivante, achevons l'argumentation.

Ainsi, sur tous ces cercles $\{|z| = r_m\}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, il vient :

$$\left| \frac{f(z)}{E(z)} \right| \leq \frac{A e^{B|z|^\rho}}{e^{-c|z|^\rho}},$$

c'est-à-dire :

$$e^{\operatorname{Re} g(z)} \leq e^{c|z|^\rho} \quad (\forall |z| = r_m, \forall m = 1, 2, 3, \dots).$$

On sait qu'une fonction holomorphe satisfaisant $|g(z)| \leq c|z|^\rho$ pour $|z|$ grand doit être un polynôme de degré (entier) $\leq \rho'$, et cela reste vrai si on a cette inégalité pour sa partie réelle seulement sur une suite de cercles grandissant indéfiniment.

Lemme 7.6. *Si une fonction entière $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ satisfait :*

$$\operatorname{Re} g(z) \leq c r^\rho \quad (\forall |z| = r_m),$$

sur une suite de cercles de rayons $1 \leq r_{m-1} < r_m \rightarrow \infty$, alors g est un polynôme de degré $\leq \rho$.

Démonstration. Développons g à l'origine en série entière normalement convergente sur les compacts de $\mathbb{C}$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Comme $\int_0^{2\pi} e^{i\ell\theta} d\theta = 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, nous savons que pour un rayon $r > 0$ arbitraire :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} b_n r^n & \text{lorsque } n \geq 0, \\ 0 & \text{lorsque } n \leq -1. \end{cases}$$

Le cas $n = 0$, dont on prend la double partie réelle, donne :

$$2 \operatorname{Re} b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{Re} g(r e^{i\theta}) d\theta.$$

Ensuite, prenons la conjuguée de la deuxième ligne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g(r e^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta = 0 \quad (\forall n \geq 1),$$

d'où en additionnant avec la première ligne pour faire apparaître $2 \operatorname{Re} g = g + \bar{g}$:

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{Re} g(r e^{i\theta}) d\theta \quad (\forall n \geq 1).$$

Ensuite, comme $0 = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta$ pour $n \geq 1$, insérons un terme nul :

$$b_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{[\operatorname{Re} g(r e^{i\theta}) - c r^\rho]}_{\leq 0 \text{ quand } r = r_m} e^{-in\theta} d\theta,$$

et en restriction à la famille intéressante de cercles, déduisons une majoration :

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq \frac{1}{\pi (r_m)^n} \int_0^{2\pi} [-\operatorname{Re} g(r_m e^{i\theta}) + c (r_m)^\rho] d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi (r_m)^n} [-2\pi \operatorname{Re} b_0 + 2\pi c (r_m)^\rho], \end{aligned}$$

pour constater que le membre de droite converge vers zéro lorsque $r_m \rightarrow \infty$ dès que $n > \rho$, d'où $b_n = 0$ pour tous les $n > \rho$, ce qui montre bien la polynomialité de $g(z) = \sum_{n \leq \rho} b_n z^n$. $\square$

En conclusion, la fonction entière $g(z)$ du facteur $f(z) = e^{g(z)} E(z)$ est bien un polynôme de degré $\leq \rho < k + 1$, donc de degré $\leq k$, ce qui termine la démonstration du Théorème 7.4, sous réserve du Lemme-Clé 7.5. $\square$

8. Démonstration du lemme-clé

Ainsi, l'objectif est d'établir une minoration :

$$\left| z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \geq e^{-c|z|^\rho},$$

pour $z \in C_{r_m}$ appartenant à une suite de cercles de rayons :

$$1 \leq r_{m-1} < r_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty.$$

Convention 8.1. Les lettres c, C désigneront des constantes positives finies, variables, dépendant du contexte.

Lemme 8.2. Les produits canoniques $E_k(z)$ satisfont :

$$|E_k(z)| \geq e^{-c|z|^{k+1}} \quad (\forall |z| \leq \tfrac{1}{2}),$$

ainsi que :

$$|E_k(z)| \geq |1 - z| e^{-c|z|^k} \quad (\forall |z| \geq \tfrac{1}{2}).$$

La première constante c , ici, est universelle ; la seconde dépend de k , qui est de toute façon fixé.

Démonstration. Lorsque $|z| \leq \frac{1}{2}$, nous pouvons utiliser la série entière qui définit le logarithme de $1 - z$ pour écrire :

$$\begin{aligned} E_k(z) &= e^{\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k}} \\ &= e^{-\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}} \\ &=: e^w. \end{aligned}$$

Comme $|e^w| \geq e^{-|w|}$, et comme, grâce au Lemme 6.2, on a $|w| \leq c|z|^k$ dès que $|z| \leq \frac{1}{2}$, la première minoration tombe :

$$\begin{aligned} |E_k(z)| &= |e^w| \geq e^{-|w|} \\ &\geq e^{-c|z|^{k+1}}. \end{aligned}$$

Pour la seconde, avec $|z| \geq \frac{1}{2}$, qui équivaut à $1 \leq 2|z|$, comme pour tout entier $1 \leq \ell \leq k$, on a :

$$1^{k-\ell} \cdot |z|^\ell \leq 2^{k-\ell} |z|^{k-\ell} |z|^\ell,$$

nous pouvons minorer et conclure :

$$\begin{aligned} |E_k(z)| &\geq |1 - z| \left| e^{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k}} \right| \\ &\geq |1 - z| e^{-\frac{|z|}{1} - \frac{|z|^2}{2} - \dots - \frac{|z|^k}{k}} \\ &\geq |1 - z| e^{-|z|^k \left(\frac{2^{k-1}}{1} + \frac{2^{k-2}}{2} + \dots + \frac{2^0}{k} \right)} \\ &=: |1 - z| e^{-c|z|^k}. \end{aligned} \quad \square$$

Le point-clé est d'obtenir une minoration du produit infini des facteurs canoniques $\prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$ dans des lieux où z est assez éloigné des zéros a_n . Le facteur z^ν n'intervient pas, car il est de toute façon ≥ 1 en module quand $|z| = r_m \geq 1$.

La première estimée, quelque peu subtile, a lieu hors d'une réunion de disques centrés en les a_n et de rayons quantitativement assez petits, égaux à $\frac{1}{|a_n|^{k+1}}$.

Lemme 8.3. *Pour tout ρ avec $\rho_f < \rho < k + 1$, on a une minoration :*

$$\left| \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \geq e^{-c|z|^\rho},$$

valable pour tout :

$$z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{D}_{\frac{1}{|a_n|^{k+1}}}(a_n).$$

Démonstration. Fixons z hors de ces disques, décomposons en deux types de facteurs, et minorons grâce au Lemme 8.2 :

$$\begin{aligned} \left| \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| &= \prod_{|a_n| \leq 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \prod_{|a_n| > 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \\ &\geq \prod_{|a_n| \leq 2|z|} \left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| \prod_{|a_n| \leq 2|z|} e^{-c \left| \frac{z}{a_n} \right|^k} \prod_{|a_n| > 2|z|} e^{-c \left| \frac{z}{a_n} \right|^{k+1}} \end{aligned}$$

C'est l'estimation du premier de ces trois produits qui requiert la restriction que z ne soit pas trop proche des a_n .

En effet, en supposant donc que $|z - a_n| \geq \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$, minorons :

$$\begin{aligned} \prod_{|a_n| \leq 2|z|} \left| \frac{a_n - z}{a_n} \right| &\geq \prod_{|a_n| \leq 2|z|} \frac{1}{|a_n|^{k+2}} \\ &= e^{-(k+2) \sum_{|a_n| \leq 2|z|} \log |a_n|}. \end{aligned}$$

Or le contrôle par le Théorème 2.9 du nombre de zéros de f dans le disque $\mathbb{D}_{2|z|}$ permet, pour tout $\rho_f < \rho' < \rho$, de majorer :

$$\begin{aligned} (k+2) \sum_{|a_n| \leq 2|z|} \log |a_n| &\leq (k+2) \mathbf{n}_f(2|z|) \log(2|z|) \\ &\leq c |z|^{\rho'} \log(2|z|) \\ [c \text{ change}] \quad &\leq c |z|^\rho, \end{aligned}$$

d'où, toujours pour $|z - a_n| \geq \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ quel que soit $n \geq 1$:

$$\prod_{|a_n| \leq 2|z|} \left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| \geq e^{-c|z|^\rho}.$$

Il reste à traiter deux produits, et pour chacun d'entre eux, nous allons obtenir une minoration valable sans restriction, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

En effet, comme $|a_n| \leq 2|z|$ dans le deuxième produit (fini), et comme $k < \rho < k+1$, il vient :

$$|a_n|^{\rho-k} \leq 2^{\rho-k} |a_n|^{\rho-k} \leq 2^1 |z|^{\rho-k},$$

d'où :

$$\frac{1}{|a_n|^k} = \frac{1}{|a_n|^\rho} |a_n|^{\rho-k} \leq \frac{1}{|a_n|^\rho} 2 |z|^{\rho-k},$$

ce qui permet, en utilisant (7.2), de minorer comme annoncé :

$$\begin{aligned} \prod_{|a_n| \leq 2|z|} e^{-c \frac{|z|^k}{|a_n|^k}} &= e^{-c|z|^k \sum_{|a_n| \leq 2|z|} \frac{1}{|a_n|^k}} \\ &\geq e^{-c|z|^k 2|z|^{\rho-k} \sum_{|a_n| \leq 2|z|} \frac{1}{|a_n|^\rho}} \\ [c \text{ change}] \quad &\geq e^{-c|z|^\rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\rho}} \\ [c \text{ change}] \quad &= e^{-c|z|^\rho}. \end{aligned}$$

Le troisième, et dernier, produit (infini) se traite de manière analogue, en partant de $|a_n| > 2|z|$ qui entraîne $\frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{2} \frac{1}{|z|}$, d'où en tenant compte de $k < \rho < k+1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|a_n|^{k+1-\rho}} &< \frac{1}{2^{k+1-\rho}} \frac{1}{|z|^{k+1-\rho}} \\ &< 1 \cdot |z|^{-k-1+\rho}, \end{aligned}$$

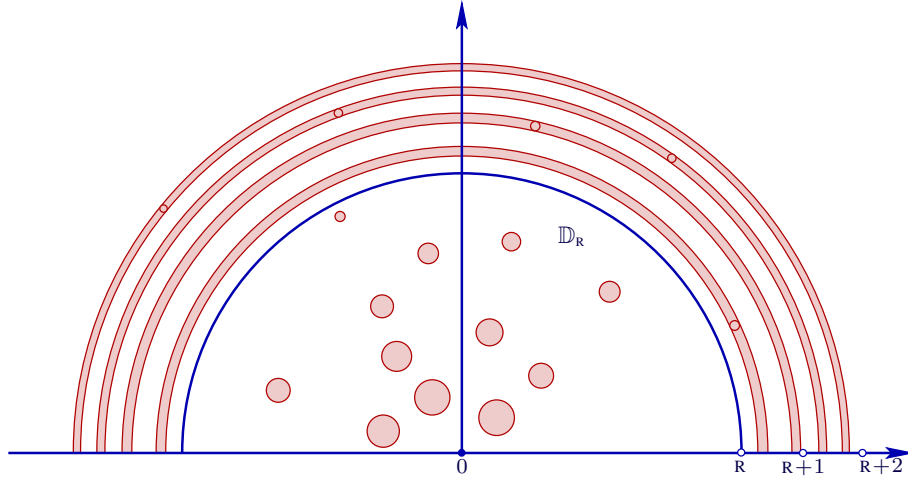
puis :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|a_n|^{k+1}} &= \frac{1}{|a_n|^{k+1-\rho}} \frac{1}{|a_n|^\rho} \\ &\leq |z|^{-k-1+\rho} \frac{1}{|a_n|^\rho}, \end{aligned}$$

ce qui permet, en utilisant à nouveau (7.2), de minorer comme annoncé :

$$\begin{aligned} \prod_{|a_n| > 2|z|} e^{-c \frac{|z|^{k+1}}{|a_n|^{k+1}}} &= e^{-c |z|^{k+1} \sum_{|a_n| > 2|z|} \frac{1}{|a_n|^{k+1}}} \\ &\geq e^{-c |z|^{k+1} |z|^{-k-1+\rho} \sum_{|a_n| > 2|z|} \frac{1}{|a_n|^\rho}} \\ &\geq e^{-c |z|^\rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\rho}} \\ [c \text{ change}] &= e^{-c |z|^\rho}. \end{aligned} \quad \square$$

Intuitivement, les rayons $\frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ de ces disques centrés en les a_n tendent suffisamment vite vers zéro, grâce à $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}} < \infty$, pour que l'on puisse s'imaginer que leur réunion devienne négligeable, pour $n \geq N \gg 1$ grand, de manière à faire passer des grands cercles de rayons r_m qui ne rencontrent aucun de ces petits disques.



Prenons en effet $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \leq \frac{1}{3},$$

ainsi qu'un rayon $R \gg 1$ assez grand pour que :

$$\mathbb{D}_{\frac{1}{|a_1|^{k+1}}}(a_1) \cup \dots \cup \mathbb{D}_{\frac{1}{|a_N|^{k+1}}}(a_N) \subset \mathbb{D}_R;$$

il n'est pas exclu que certains autres a_n avec $n \geq N+1$ appartiennent aussi à $\mathbb{D}_R$.

Insérons les disques restants dans les anneaux d'épaisseur $\frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ qu'ils balayent en tournant autour de l'origine :

$$\bigcup_{n=N+1}^{\infty} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_n| < \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \right\} \subset \bigcup_{n=N+1}^{\infty} \left\{ w \in \mathbb{C} : |a_n| - \frac{1}{|a_n|^{k+1}} < |w| < |a_n| + \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \right\}.$$

Comme la réunion de ces anneaux est d'épaisseur $\leq \frac{2}{3}$, pour chaque entier $m = 1, 2, 3, \dots$, elle ne peut couvrir complètement chaque anneau-unité :

$$\{R + m - 1 < |w| < R + m\},$$

d'épaisseur $1 > \frac{2}{3}$. Par conséquent, il existe bien une suite de cercles C_{r_m} centrés à l'origine de rayons :

$$R + m - 1 < r_m < R + m,$$

d'où $r_{m-1} < r_m \rightarrow \infty$, qui ne rencontrent aucun de ces anneaux, donc aucun disque $\mathbb{D}_{\frac{1}{|a_n|^{k+1}}}(a_n)$, y compris pour $1 \leq n \leq N$, par construction.

Ainsi s'achève la démonstration du Lemme-clé 7.5. $\square$

9. Exercices

Exercice 1. (a) Avec, pour $m \geq 1$ entier :

$$a_{2m-1} := -\frac{1}{\sqrt{m}} \quad \text{et} \quad a_{2m} := \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m},$$

montrer que le produit infini :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

converge vers un nombre complexe *non nul*, bien que la série de terme général a_n ne soit pas convergente.

(b) Trouver un exemple de suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres réels telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sans que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ converge.

(c) Montrer, pour une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres $a_n \in \mathbb{C}$, que si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, et si $a_n \neq -1$ pour tout n , alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \text{ converge.}$$

Exercice 2. EE

Fonction Gamma d'Euler et fonction zêta de Riemann

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

2. La fonction $\Gamma(z)$

Existe-t-il une manière naturelle d'*interpoler* la fonction factorielle $\mathbb{N} \ni n \mapsto n!$ entre deux entiers n et $n + 1$ quelconques ? La réponse est oui !

Pour $x > 0$ réel, la *fonction Gamma* est définie par :

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Cette intégrale converge près de $t = 0$, puisque la fonction t^{x-1} y est intégrable d'après le critère de Riemann, et elle converge aussi pour $t \rightarrow \infty$, simplement parce que la décroissance de e^{-t} neutralise toute croissance polynomiale. En intégrant par parties, le lecteur pourra vérifier que l'on a $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, mais il peut s'en dispenser, puisque nous allons aussi faire ce calcul dans un instant. Sans attendre, décollons vers l'imaginaire !

Quelques observations simples permettent en effet d'étendre le domaine de définition.

Théorème 2.1. *La fonction $\mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto \Gamma(x)$ se prolonge comme fonction holomorphe dans le demi-plan droit $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, par la formule :*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Évidemment, on note :

$$z = x + iy.$$

Démonstration. Commençons par observer que :

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} |e^{(z-1)\log t}| = e^{-t} e^{(x-1)\log t} = e^{-t} t^{x-1},$$

de telle sorte que cette intégrale complexe converge effectivement lorsque $\operatorname{Re} z = x > 0$, puisqu'elle est majorée par :

$$\begin{aligned} |\Gamma(z)| &= \left| \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^\infty |e^{-t} t^{z-1}| dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x) < \infty. \end{aligned}$$

Mais pourquoi l'application $z \mapsto \Gamma(z)$ serait-elle de surcroît holomorphe ?

Il suffit de faire voir, pour tous nombres positifs $0 < \delta < M < \infty$, que cette intégrale définit une fonction qui est holomorphe dans la bande verticale :

$$B_{\delta,M} := \{z \in \mathbb{C} : \delta < \operatorname{Re} z < M\}.$$

Puisqu'elle peut être envisagée comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}$, introduisons :

$$\Phi_{\varepsilon}(z) := \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{-t} e^{(z-1)\log t} dt.$$

D'après un théorème connu, puisque l'intégrande est visiblement holomorphe par rapport à z , cette fonction $z \mapsto \Phi_{\varepsilon}(z)$ est holomorphe dans la bande $B_{\delta,M}$. En prenant $\varepsilon := \frac{1}{n}$, il suffit alors de montrer que la suite $(\Phi_{\frac{1}{n}}(z))_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes dans $B_{\delta,M}$ converge uniformément vers $\Gamma(z)$, car un théorème connu de Cauchy garantira alors que la limite γ est holomorphe.

À cette fin, estimons :

$$|\Gamma(z) - \Phi_{\varepsilon}(z)| \leq \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{x-1} dt + \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (z \in B_{\delta,M}).$$

La première intégrale converge uniformément vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, puisqu'on peut la majorer par :

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{x-1} dt \leq 1 \cdot \int_0^{\varepsilon} t^{x-1} dt = \left[\frac{1}{x} t^x \right]_0^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^x}{x} \leq \frac{\varepsilon^{\delta}}{\delta}.$$

Quant à la seconde :

$$\left| \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \right| \leq \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{M-1} dt \leq \text{constante} \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t/2} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad \square$$

Malgré le fait que l'intégrale qui définit $\Gamma(z)$ n'est *pas* absolument convergente pour les valeurs de z telles que $\operatorname{Re} z \leq 0$, nous allons pouvoir prolonger méromorphiquement Γ au plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier, avec peu de pôles, seulement aux points entiers négatifs $z = 0, -1, -2, -3, \dots$. L'unicité de ce prolongement méromorphe sera alors garantie par le principe d'unicité pour les fonctions holomorphes, en-dehors de cet ensemble discret de pôles. Nous continuerons à noter $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ce prolongement méromorphe.

L'existence de pôles aux points entiers négatifs provient en fait d'une identité fonctionnelle importante.

Lemme 2.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $x = \operatorname{Re} z > 0$, on a :*

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z),$$

et :

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Démonstration. Une simple intégration par parties dans le domaine de convergence $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ explique l'identité :

$$\begin{aligned} z \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} e^{-t} z t^{z-1} dt \\ &= \left[e^{-t} t^z \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t} t^z dt \\ &= 0 + \Gamma(z+1), \end{aligned}$$

et comme :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^\infty = 1,$$

une récurrence instantanée donne $\Gamma(n+1) = n!$ — point d'exclamation de plaisir ! $\square$

C'est la division nécessaire par le facteur z dans la formule quasi-équivalente $\Gamma(z) = \frac{1}{z} \Gamma(z+1)$ qui va introduire des pôles — heureusement simples !

Théorème 2.3. *La fonction $\Gamma(z)$, initialement définie dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, bénéficie d'un prolongement méromorphe au plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier dont les seules singularités sont des pôles simples aux entiers négatifs $z = 0, -1, -2, -3, \dots$, où elle a pour résidus :*

$$\operatorname{res}_{z=-n} \Gamma = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Démonstration. Il suffit de prolonger Γ à tout demi-plan de la forme $\{\operatorname{Re} z > -m\}$ avec un entier $m \geq 1$ quelconque.

Pour $\operatorname{Re} z > -1$, définissons :

$$\Phi_1(z) := \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Puisque $\Gamma(z+1)$ est holomorphe dans $\{\operatorname{Re} z > -1\}$, il est clair que Φ_1 est méromorphe dans ce demi-plan, et qu'elle y a une unique singularité, un pôle d'ordre 1 en $z = 0$. Comme $\Gamma(1) = 1$, son résidu y vaut $1 = \frac{(-1)^0}{0!}$. De plus, dans le sous-demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 0\} \subset \{\operatorname{Re} z > -1\}$, l'identité fondamentale montre que cette fonction :

$$\Phi_1(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z)$$

coïncide bien avec la fonction à prolonger.

Pour un entier $m \geq 1$ quelconque, définissons dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > -m\}$ la fonction :

$$\Phi_m(z) := \frac{\Gamma(z+m)}{(z+m-1) \cdots (z+n+1)(z+n)(z+n-1) \cdots (z+1)z}.$$

Visiblement, cette fonction est méromorphe avec des pôles simples en $z = -m+1, \dots, -1, 0$, et en un point entier négatif $z = -n$ avec $0 \leq n \leq m-1$ quelconque, elle y a pour résidu :

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=-n} \Phi_m(z) &= \frac{\Gamma(-n+m)}{(-n+m-1) \cdots (1) (-1)(-2) \cdots (-n)} \\ &= \frac{(m-n+1)!}{(m-n+1)! (-1)^n n!} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

De plus, dans le sous-demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 0\} \subset \{\operatorname{Re} z > -m\}$, une itération de l'identité fondamentale du Lemme 2.2 :

$$\Gamma(z+m) = (z+m-1) \cdots (z+1)z \Gamma(z)$$

montre aussitôt que $\Phi_m(z) = \Gamma(z)$ coïncide bien avec la fonction à prolonger.

D'ailleurs, le principe d'identité garantit aussi que $\Phi_m = \Phi_n$ pour tous entiers $1 \leq n \leq m$, dans $\{\operatorname{Re} z > -n\} \setminus \mathbb{Z}_-$. $\square$

L'identité fondamentale $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ continue d'être satisfaite (exercice mental) dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ — c'est-à-dire en-dehors des pôles — parce que (solution) les deux côtés de cette formule coïncident dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$.

On peut même se convaincre (exercice) qu'en un entier négatif quelconque $z = -n$ avec $n \geq 1$, les deux membres de l'identité $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ sont infinis, et que :

$$\operatorname{res}_{z=-n} \Gamma(z+1) = (-n) \operatorname{res}_{z=-n} \Gamma(z).$$

Enfin, en $z = 0$, notons que :

$$\Gamma(1) = \lim_{z \rightarrow 0} z\Gamma(z).$$

Voici une démonstration alternative du Théorème 2.3, encore plus éclairante, dont les idées se recontreront aussi plus tard. Elle consiste à décomposer l'intégrale qui définit $\Gamma(z)$ pour $\operatorname{Re} z > 0$ en deux morceaux :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Grâce à la décroissance forte de e^{-t} , le deuxième définit une fonction holomorphe entière, définie sur $\mathbb{C}$. Quant au premier morceau, développons-y en série entière l'exponentielle, justifions la convergence normale (exercice), et intégrons terme à terme :

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^n}{n!} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}.$$

Ceci nous permet d'écrire formellement :

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Assertion 2.4. Cette série infinie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$ définit une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ ayant pour seules singularités des pôles simples aux entiers négatifs $z = -n$ où elle a pour résidus $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Démonstration. Pour un grand rayon $R \gg 1$, et pour un entier $N > 2R$, décomposons-la en :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}.$$

La première somme, qui est finie, définit une fonction méromorphe dans le disque $\{|z| < R\}$ avec les pôles et les résidus annoncés, tout à fait en accord avec ce que la première démonstration a déjà fait voir.

Pour ce qui est de la deuxième somme portant sur des entiers $n > N > 2R$, toujours pour $|z| < R$, comme $|n+z| \geq R$ implique :

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \right| \leq \frac{1}{n!R},$$

nous voyons instantanément qu'elle converge normalement sur le disque $\{|z| < R\}$, donc y définit une fonction holomorphe grâce à un théorème déjà connu.

Comme $R \gg 1$ pouvait être choisi arbitrairement grand, tout ceci montre que la représentation de $\Gamma(z)$ sous la forme d'une série méromorphe infinie suivie d'une intégrale est valable dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ tout entier. $\square$

En définitive, nous avons pour *tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$:

$$(2.5) \quad \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+z)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Présentons maintenant d'autres propriétés de la fonction Γ . Voici une identité qui dévoile une symétrie fondamentale de Γ par rapport à la droite $\{\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\}$.

Théorème 2.6. [Formule des compléments] *En tout* $z \in \mathbb{C}$:

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Observons que $\Gamma(1-z)$ a des pôles simples aux entiers naturels $z = 1, 2, 3, \dots$, de telle sorte que le produit $\Gamma(z) \Gamma(1-z)$, une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, possède des pôles simples en *tous* les entiers relatifs $\in \mathbb{Z}$, tout aussi bien que la fonction $\frac{\pi}{\sin \pi z}$.

Démonstration. Il suffit d'établir cette identité en des points *réels* $0 < x < 1$, car alors le principe d'identité garantira aussitôt qu'elle est vraie dans tout $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

Lemme 2.7. *Pour un paramètre réel* $0 < a < 1$ *quelconque, on a :*

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v} dv = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Démonstration. Il suffit d'effectuer le changement de variable $v = e^x$ et de se souvenir de l'intégration, déjà vue, de la fonction $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ le long de rectangles de sommets $-R$, R , $R + 2i\pi$, $-R + 2i\pi$ avec $R \rightarrow \infty$, pour calculer l'intégrale qui apparaît :

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}. \quad \square$$

Pour établir le théorème, avec un paramètre $t > 0$ quelconque, en effectuant le changement de variable $vt = u$, préparons :

$$\Gamma(1-x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-x} du = t \int_0^{\infty} e^{-vt} (vt)^{-x} dv,$$

et grâce à cette astuce, calculons, puis concluons :

$$\begin{aligned} \Gamma(1-x) \Gamma(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \Gamma(1-x) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \left(t \int_0^{\infty} e^{-vt} (vt)^{-x} dv \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} v^{-x} \left(\int_0^{\infty} e^{-t(1+v)} dt \right) dv \\ &= \int_0^{\infty} v^{-x} \left[\frac{e^{-t(1+v)}}{-1-v} \right]_0^{\infty} dv \\ &= \int_0^{\infty} \frac{v^{-x}}{1+v} dv \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi (1-x)} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi x}. \end{aligned} \quad \square$$

En particulier, au point $z = \frac{1}{2}$, en observant que $\Gamma(x) > 0$ quand $x \in \mathbb{R}_+^*$, nous trouvons la valeur spéciale :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Poursuivons notre étude de la fonction Gamma en regardant son inverse, fonction qui devient entière et à croissance contrôlée.

Théorème 2.8. *La fonction $z \mapsto \Gamma(z)$ d'Euler jouit des propriétés suivantes.*

(1) $\frac{1}{\Gamma(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe entière, avec des zéros simples aux entiers négatifs $z = 0, -1, -2, \dots$, et aucun zéro ailleurs.

(2) $\frac{1}{\Gamma(z)}$ a pour croissance :

$$\left| \frac{1}{\Gamma(z)} \right| \leq c_1 e^{c_2 |z| \log |z|} \quad (\forall z \in \mathbb{C}),$$

où $0 < c_1, c_2 < \infty$ sont des constantes universelles.

Une telle inégalité doit en fait s'interpréter quand $|z| \rightarrow \infty$. On dit alors que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est d'ordre ≤ 1 , au sens où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $0 < c_{1,\varepsilon} < \infty$ telle que :

$$\left| \frac{1}{\Gamma(z)} \right| \leq c_{1,\varepsilon} e^{c_2 |z|^{1+\varepsilon}}.$$

L'Exercice 1 montre que l'on ne peut pas ici se dispenser d'un $\varepsilon > 0$ dans la puissance $|z|^{1+\varepsilon}$.

Démonstration. Grâce au Théorème 2.6 qui précède, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \Gamma(1 - z),$$

et à droite, les pôles simples de $\Gamma(1 - z)$ situés aux entiers $z = 1, 2, 3, \dots$ sont annihilés par les zéros simples de $\sin \pi z$, donc $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est holomorphe entière avec des zéros simples aux zéros restants de $\sin \pi z$, c'est-à-dire en $z = 0, -1, -2, \dots$. De plus, $\frac{1}{\Gamma(z)} \neq 0$ ailleurs, car les seuls zéros de $\sin \pi z$ sont en $z \in \mathbb{N}$.

Pour établir l'estimée de croissance, avec un réel $x \geq 0$ quelconque, et avec l'entier positif unique $x \leq n \leq x + 1$, commençons par :

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-t} t^x dt &\leq \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \\ &= n! \\ &\leq n^n \\ &= e^{n \log n} \\ &\leq e^{(x+1) \log (x+1)}. \end{aligned}$$

En revenant à l'identité (2.5) écrite pour $\Gamma(1 - z)$:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n + 1 - z)} + \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_1^\infty e^{-t} t^{-z} dt,$$

nous pouvons alors en utilisant $|e^w| \leq e^{|w|}$ ainsi que pour $t \geq 0$:

$$|t^{-z}| = |e^{-z \log t}| = e^{-\operatorname{Re} z \log t} \leq e^{|\operatorname{Re} z| \log t} \leq e^{|z| \log t} = t^{|z|},$$

estimer la croissance du deuxième terme :

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i\pi} \right| \left| \int_1^\infty e^{-t} t^{-z} dt \right| &\leq \frac{e^{\pi|z|}}{\pi} \int_1^\infty e^{-t} t^{|z|} dt \\ &\leq \frac{e^{\pi|z|}}{\pi} e^{(|z|+1) \log(|z|+1)} \\ &\leq c_1 e^{c_2 |z| \log |z|}. \end{aligned}$$

Quant au premier terme :

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+1-z)},$$

dans un premier cas où $|\operatorname{Im} z| \geq 1$, puisqu'on a alors pour tout entier $n \geq 0$:

$$|n+1-z| \geq 1,$$

il se majore aisément :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin \pi z}{\pi} \right| \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+1-z)} \right| &\leq \frac{e^{\pi|z|}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot 1} \\ &= \frac{e^{\pi|z|+1}}{\pi}. \end{aligned}$$

Dans l'autre cas où $|\operatorname{Im} z| < 1$, introduisons l'unique entier $k = k_z$ avec $k - \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z < k + \frac{1}{2}$, et distinguons deux sous-cas.

Lorsque $k \geq 1$, mettons en exergue, dans la somme infinie, le terme $n = k-1$:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)! (k-z)} + \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n \neq k-1} \frac{(-1)^n}{n! (n+1-z)},$$

et démontrons que les deux expressions à droite sont bornées.

Pour la première expression, avec la constante :

$$\max_{|w| \leq 3/2} \left| \frac{\sin \pi w}{\pi w} \right| =: c < \infty,$$

finie parce que $w \mapsto \frac{\sin \pi w}{\pi w}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car en 0 on a $\sin \pi w = \pi w + O(w^2)$, estimons la par cette constante :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin \pi z}{\pi} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)! (k-z)} \right| &= \left| \frac{\sin \pi (k-z)}{\pi (k-z)} \right| \frac{1}{(k-1)!} \\ [w := k-z] &\leq \max_{|w| \leq 3/2} \left| \frac{\sin \pi w}{\pi w} \right| = c, \end{aligned}$$

sachant que l'on a ici :

$$|w| = |k-z| \leq |k - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \frac{1}{2} + 1.$$

Ensuite, grâce à :

$$\begin{aligned}
 n \leq k-2 &\implies |n+1-z| \geq |n+1-\operatorname{Re} z| = \operatorname{Re} z - n - 1 \\
 &\geq k - \frac{1}{2} - n - 1 \\
 &\geq \frac{1}{2}, \\
 n \geq k &\implies |n+1-z| \geq |n+1-\operatorname{Re} z| = n+1-\operatorname{Re} z \\
 &\geq n+1-k-\frac{1}{2} \\
 &\geq \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

constatons que le second terme est lui aussi borné :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n \neq k-1} \frac{(-1)^n}{n!(n+1-z)} \right| &\leq \left| \frac{e^{i\pi x - \pi y} - e^{-i\pi x + \pi y}}{2i\pi} \right| \sum_{n \neq k-1} \frac{1}{n! \cdot \frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{e^{\pi|y|}}{\pi} 2e^1 \\
 &\leq \frac{2}{\pi} e^{\pi+1}.
 \end{aligned}$$

Enfin, lorsque $k \leq 0$, d'où $\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$ d'après notre supposition, il devient inutile de mettre un terme en exergue, car alors on a toujours :

$$|n+1-z| \geq n+1-\operatorname{Re} z \geq n+1-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

d'où similairement :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1-z)} \right| &\leq \frac{e^{\pi|y|}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot \frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{2}{\pi} e^{\pi+1}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Le fait que $\frac{1}{\Gamma}$ satisfasse une condition du type qui a été discuté dans un chapitre précédent conduit naturellement à une factorisation de Hadamard.

Rappelons auparavant que la *constante d'Euler* :

$$\gamma := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N,$$

est bien définie, car :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx + \frac{1}{N} - \int_1^N \frac{1}{x} dx \\
 &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right) dx + \frac{1}{N},
 \end{aligned}$$

avec, lorsque $n \leq x \leq n+1$:

$$0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{x} = \frac{x-n}{xn} \leq \frac{1}{n^2},$$

donc :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \frac{1}{N},$$

avec $0 < a_n \leq \frac{1}{n^2}$, ce qui fait voir la convergence, grâce à $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

Théorème 2.9. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Démonstration. Grâce au théorème de factorisation de Hadamard, et au fait que $\frac{1}{\Gamma}$ est entière d'ordre ≤ 1 , avec des zéros simples en $z = 0, -1, -2, \dots$, nous pouvons représenter $\frac{1}{\Gamma}$ sous la forme d'un produit de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Az+B} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

dans lequel il reste à déterminer les deux constantes $A, B \in \mathbb{C}$.

Mais si nous nous souvenons que $z\Gamma(z) \rightarrow 1$ quand $z \rightarrow 0$, nous trouvons $B = 0$, ou n'importe quel multiple entier de $2i\pi$, ce qui ne change rien.

Ensuite, assignons $z := 1$ et utilisons $\Gamma(1) = 1$:

$$\begin{aligned} e^{-A} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\sum_{n=1}^N [\log(1+1/n) - 1/n]} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\sum_{n=1}^N [\log(n+1) - \log n] - \sum_{n=1}^N 1/n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\log(N+1) - \sum_{n=1}^N 1/n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\log(1+1/N) + \log N - \sum_{n=1}^N 1/N} \\ &= e^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Ainsi, $A = \gamma + 2ik\pi$ pour un entier $k \in \mathbb{Z}$, mais comme $\Gamma(x)$ est réelle pour $x > 0$ réel, il faut $k = 0$, ce qui conclut. $\square$

Ces arguments montrent que $\frac{1}{\Gamma}$ est essentiellement caractérisée, à des constantes normalisatrices près, comme la fonction holomorphe entière :

- qui a des zéros simples en $z = 0, -1, -2, \dots$ et ne s'annule nulle part ailleurs ;
- est d'ordre de croissance ≤ 1 .

Observons que $\sin \pi z$ a des propriétés analogues, excepté le fait qu'elle s'annule en *tous* les entiers $z = k \in \mathbb{Z}$. Cependant, tandis que $\sin \pi z$ jouit d'une propriété de croissance de la forme $\sin \pi z = O(e^{c|z|})$, l'Exercice 1 montre que tel n'est *pas* le cas pour $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

3. La fonction $\zeta(s)$

La fonction zêta de Riemann est définie, pour $s \in \mathbb{C}$ complexe avec $\operatorname{Re} s > 1$, par la série :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

convergente et définit, comme nous l'avons déjà vu, une fonction holomorphe dans le demi-plan complexe $\{\operatorname{Re} s > 1\}$.

Comme la fonction $\Gamma(z)$ d'Euler, cette fonction $\zeta(s)$ de Riemann peut être prolongée méromorphiquement au plan complexe tout entier, avec un unique pôle, simple, en $s = 1$. En fait, il existe de nombreuses démonstrations de ce prolongement, et nous en présentons une qui dévoile une équation fonctionnelle importante satisfaite par $\zeta(s)$.

Toutefois, le prolongement de $\zeta(s)$ au plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier est plus délicat que celui de la fonction $\Gamma(z)$. La voie argumentative que nous choisissons relie ζ et Γ à une autre fonction importante en théorie analytique des nombres. Commençons par quelques préliminaires.

D'après le cours d'*Analyse de Fourier*, on sait que la fonction $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ — qui appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions à décroissance (très) rapide à l'infini — coïncide avec sa transformée de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi \xi x} dx = e^{-\pi \xi^2}.$$

Avec un paramètre réel $t > 0$, le changement de variable dans cette intégrale :

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{t}}$$

donne que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) := e^{-\pi t x^2}$ est $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi \xi^2}{t}}$.

Rappelons aussi la *formule sommatoire de Poisson*, valable pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n),$$

qui donne ici :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t n^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}.$$

Si donc nous introduisons la fonction ϑ définie, pour $t > 0$ réel, par :

$$\vartheta(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t},$$

nous voyons qu'elle satisfait l'équation fonctionnelle :

$$(3.1) \quad \vartheta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \vartheta\left(\frac{1}{t}\right).$$

L'information dont nous aurons besoin concerne la décroissance exponentielle de cette fonction :

$$\vartheta(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t},$$

lorsque $t \rightarrow \infty$, ainsi que son comportement singulier quand $t \xrightarrow{>} 0$.

Lemme 3.2. *Il existe une constante universelle $0 < C < \infty$ telle que :*

$$(0 \leq) \quad \vartheta(t) - 1 \leq C e^{-t} \quad (\forall t \geq 1),$$

et :

$$\vartheta(t) \leq C \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (\forall 0 < t \leq 1).$$

Démonstration. Comme $\{n^2 : n \geq 1\} \supset \{m \geq 1\}$, on a :

$$\begin{aligned} \vartheta(t) - 1 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \leq 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m t} \\ &= 2 e^{-\pi t} \left[1 + e^{-\pi t} + e^{-2\pi t} + e^{-3\pi t} + \dots \right] \\ &= 2 e^{-\pi t} \frac{1}{1 - e^{-\pi t}}, \end{aligned}$$

et pour $t \geq 1$, puisque $e^{-\pi t} \leq e^{-\pi}$, nous obtenons bien :

$$\vartheta(t) - 1 \leq 2 \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}.$$

Ensuite, grâce à l'équation fonctionnelle (3.1), pour $0 < t \leq 1$, d'où $1 \leq \frac{1}{t} < \infty$, en recyclant ce que nous venons de faire :

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \frac{1}{\sqrt{t}} \vartheta\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{t}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 + 2 \frac{e^{-\pi \frac{1}{t}}}{1 - e^{-\pi \frac{1}{t}}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 + 2 \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \right). \end{aligned}$$

Tout ceci montre qu'on peut prendre comme constante universelle $C := 1 + 2 \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}$. $\square$

Nous sommes maintenant en position d'établir une relation importante entre les trois fonctions ζ , Γ , ϑ .

Théorème 3.3. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} s > 1$, on a :*

$$\int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} \left[\frac{\vartheta(u) - 1}{2} \right] du = \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

Démonstration. Comme $\frac{\vartheta(u)-1}{2}$ consiste en la sommation des termes $e^{-\pi n^2 u}$ pour $n = 1, \dots, \infty$, calculons les intégrales suivantes dans lesquelles nous effectuons le changement de variable $u = \frac{1}{\pi n^2} t$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du &= \int_0^{\infty} \frac{\pi n^2}{(\pi n^2)^{\frac{s}{2}}} t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t} \frac{dt}{\pi n^2} \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \frac{1}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right). \end{aligned}$$

[Reconnaître Γ]

Les estimées du Lemme 3.2 justifient alors l'interversion entre sommation infinie et intégration dans le calcul conclusif suivant :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \left[\frac{\vartheta(u)-1}{2} \right] du &= \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 u} \right) du \\
 &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du \\
 &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \frac{1}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \quad \square
 \end{aligned}$$

Au vu de cela, introduisons une certaine modification de la fonction ζ , appelée *fonction xi*, définie pour $\operatorname{Re} s > 1$ comme étant le résultat que nous venons d'obtenir :

$$\xi(s) := \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

et qui met en lumière une symétrie fondamentale.

Théorème 3.4. *Cette fonction $\xi(s)$ est holomorphe dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$ et possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, avec deux pôles simples en $s = 0$ et en $s = 1$.*

De plus, pour tout $s \in \mathbb{C}$:

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Bien entendu, en $s = 0$ et 1 , on a $\xi(0) = \infty = \xi(1)$.

Démonstration. Soit la fonction auxiliaire $\psi(u) := \frac{\vartheta(u)-1}{2}$, déjà considérée plus haut. L'équation fonctionnelle $\vartheta(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \vartheta\left(\frac{1}{u}\right)$ se transmet à ψ :

$$2\psi(u) + 1 = \frac{1}{\sqrt{u}} \left[2\psi\left(\frac{1}{u}\right) + 1 \right],$$

c'est-à-dire :

$$\psi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{2}.$$

En partant du Théorème 3.3, découpons l'intégrale, insérons, changeons de variable, transformons, et calculons (patiemment) pour $\operatorname{Re} s > 1$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\
 &= \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\
 &= \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1} \left[\frac{1}{\sqrt{u}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{2} \right] du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\
 &= \int_0^1 \frac{u^{\frac{s}{2}}}{u\sqrt{u}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) du + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - u^{\frac{s}{2}-1} \right) du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\
 [u = \frac{1}{v}] \quad &= \int_1^\infty v^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \psi(v) dv + \frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} \right]_0^1 + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\
 &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \left(u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1} \right) \psi(u) du.
 \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\xi(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \left(u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1} \right) \psi(u) du.$$

Or puisque la fonction ψ décroît exponentiellement à l'infini, cette dernière intégrale à paramètre définit une fonction holomorphe entière, ce qui fait clairement voir que :

$$\xi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}),$$

avec deux pôles simples en $s = 0$ et en $s = 1$.

De plus, il est visible que $\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$ est invariant lorsqu'on remplace $s \mapsto 1-s$, et on se convainc aisément que l'intégrale est aussi invariante à travers $s \mapsto 1-s$. En définitive, on a bien $\xi(s) = \xi(1-s)$. $\square$

Grâce à cette identité qui montre la symétrie de $\xi(s)$ à travers la réflexion d'axe $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$, nous pouvons facilement déduire les propriétés de la fonction zêta de Riemann : son prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, ainsi que son équation fonctionnelle.

Théorème 3.5. *La fonction $\zeta(s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, avec un unique pôle simple en $s = 1$ de résidu égal à 1, et elle satisfait l'équation fonctionnelle :*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{1}{2} \pi s\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Démonstration. Le prolongement méromorphe de $\zeta(s)$ est fournit instantanément par la formule :

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \frac{\xi(s)}{\Gamma(\frac{s}{2})}.$$

Mais comme $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$ est holomorphe entière, d'après le Théorème 2.8, avec des zéros simples en $s = 0, -2, -4, \dots$, le pôle simple de $\xi(s)$ en $s = 0$ est annihilé par le zéro correspondant de $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$. Par conséquent, il ne reste, comme singularité pour $\zeta(s)$, que le pôle simple de ξ en $s = 1$.

Ensuite, l'équation fonctionnelle pour $\xi(s)$:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \xi(s) = \xi(1-s) = \pi^{\frac{-1+s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s),$$

donne :

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \zeta(1-s),$$

et il nous faut encore remplacer ici $\Gamma(\frac{1-s}{2})$. Or avec $z := \frac{1-s}{2}$, la formule de l'Exercice 3 :

$$\Gamma(z) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{1-2z} \frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z + \frac{1}{2})}$$

devient :

$$\Gamma(\frac{1-s}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^s \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\frac{s}{2})}.$$

Nous pouvons donc remplacer, réorganiser et appliquer au final la formule des compléments :

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^s \Gamma(1-s)}{\Gamma(\frac{s}{2}) \Gamma(1-\frac{s}{2})} \zeta(1-s) \\ &= 2^s \pi^{s-1} \frac{\pi}{\Gamma(\frac{s}{2}) \Gamma(1-\frac{s}{2})} \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \\ &= 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\pi \frac{s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s). \end{aligned}$$

[Théorème 2.6]

□

4. Exercices

Exercice 1. (a) Montrer qu'il n'existe pas de constantes $0 < c_1, c_2 < \infty$ telles que :

$$\left| \frac{1}{\Gamma(z)} \right| \leq c_1 e^{c_2 |z|} \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Indication: Aux points $z = -k - \frac{1}{2}$ avec $k \geq 1$ entier, constater que :

$$\left| \frac{1}{\Gamma(-k - \frac{1}{2})} \right| \geq \frac{k!}{\pi}.$$

(b) Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe entière $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ de croissance $|F(z)| \leq c_1 e^{c_2 |z|}$ ayant des zéros simples aux entiers négatifs $z = 0, -1, -2, \dots$, et qui ne s'annule nulle part ailleurs.

Exercice 2. Montrer que la fonction Gamma (réelle) d'Euler :

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0),$$

est *logarithmiquement convexe*, c'est-à-dire satisfait :

$$\Gamma'(x) \Gamma'(x) \leq \Gamma(x) \Gamma''(x) \quad (\forall x > 0).$$

Exercice 3. (a) Montrer que la formule classique de Wallis peut s'écrire sous la forme :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} (2n+1)^{1/2}.$$

(b) En déduire l'identité satisfaite par la fonction méromorphe Gamma :

$$\Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{1-2z} \Gamma(2z) \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Exercice 4. EE

Exercice 5. EE

Théorème des nombres premiers

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

On note :

$$\mathcal{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$$

l'ensemble des nombres entiers positifs premiers. Pour $x \geq 1$ réel, soit :

$$\pi(x) := \text{Card} \{p \in \mathcal{P} : 1 \leq p \leq x\}.$$

L'objectif de ce chapitre est d'établir le

Théorème 1.1. [des nombres premiers] *Asymptotiquement lorsque $x \rightarrow \infty$:*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

La démonstration s'organise en une série de 7 lemmes 'capitaux', accompagnés d'un théorème de type 'taubérien' dû à D.J. Newman, montrant qu'une certaine intégrale dépendant d'un paramètre réel $0 \leq T < \infty$ a une limite quand $T \rightarrow \infty$.

Convention 1.2. La lettre p désignera toujours un nombre premier.

2. Sept lemmes capitaux

Les 7 lemmes dévoilent progressivement des propriétés de 3 fonctions, la *fonction zêta de Riemann* :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

holomorphe en $s \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re } s > 1$, puis la fonction dérivée :

$$\begin{aligned} \Phi(s) &:= - \frac{d}{ds} \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \right) \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\log p}{p^s}, \end{aligned}$$

elle aussi holomorphe dans $\{\text{Re } s > 1\}$, et enfin la fonction, positive et croissante par sauts, d'un réel $x \geq 1$:

$$\vartheta(x) := \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x}} \log p.$$

En effet, on se convainc aisément (exercice de révision) que les séries définissant $\zeta(s)$ et $\Phi(s)$ sont normalement, donc uniformément, convergentes sur les demi-plans fermés $\{\operatorname{Re} s \geq 1 + \delta\}$, quel que soit $\delta > 0$, d'où leur holomorphicité.

Lemme 2.1. [Euler] *Pour $\operatorname{Re} s > 1$, on a la formule de produit d'Euler :*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Démonstration. La factorisation unique des entiers $n \geq 1$, et la convergence justifient le calcul formel :

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{r_2, r_3, r_5, \dots \geq 0} \frac{1}{(2^{r_2} 3^{r_3} 5^{r_5} \dots)^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{p^{rs}} \right) \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \end{aligned}$$

les détails étant laissés au lecteur — qui n'a pas l'interdiction de s'aider du fait que ces détails ont déjà été fournis dans un chapitre qui précède ! $\square$

En $s = 1$, il y a divergence de $\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, mais après soustraction d'un pôle simple :

Lemme 2.2. *La fonction $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ se prolonge holomorphiquement à $\{\operatorname{Re} s > 0\}$.*

Démonstration. En effet, avec $\operatorname{Re} s > 1$, il apparaît dans la différence une série :

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_n^{n+1} dx \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right)}_{=: a_n(s)}$$

de fonctions holomorphes qui sont majorables grâce à l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned} |a_n(s)| &= \left| \int_n^{n+1} dx \int_n^x \frac{s du}{u^{s+1}} \right| \leq 1 \cdot \max_{n \leq u \leq n+1} \left| \frac{s}{u^{s+1}} \right| \\ &= \frac{|s|}{n^{1+\operatorname{Re} s}}, \end{aligned}$$

ce qui montre la convergence uniforme sur $\{\operatorname{Re} s > 0\}$ vers une fonction-limite holomorphe. $\square$

Lemme 2.3. *Il existe une constante universelle $C < \infty$ telle que, pour tout $x \geq 1$:*

$$(0 \leq) \quad \vartheta(x) = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x}} \log p \leq Cx.$$

Démonstration. Pour $n \geq 1$ entier, il est clair que :

$$\begin{aligned} 4^n &= (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \dots + \binom{2n}{n} + \dots + \binom{2n}{2n} \geq \binom{2n}{n} \geq \prod_{n < p \leq 2n} p \\ &= e^{\vartheta(2n) - \vartheta(n)}, \end{aligned}$$

puisque les nombres premiers $n < p \leq 2n$ au numérateur de $\frac{(n+1) \cdots (n+n)}{1 \cdots n}$ ne peuvent être effacés par le dénominateur.

Ainsi :

$$n \log 4 \geq \vartheta(2n) - \vartheta(n).$$

Or une sommation télescopique :

$$\vartheta(2^{k+1}) - \vartheta(2^k) \leq 2^k \log 4,$$

.....

$$\vartheta(4) - \vartheta(2) \leq 2^1 \log 4,$$

$$\vartheta(2) - \vartheta(1) \leq 2^0 \log 4,$$

donne :

$$\vartheta(2^{k+1}) \leq 2^{k+1} \log 4,$$

et comme pour tout $x \geq 1$ réel, il existe un unique entier $k_x \geq 1$ encadrant :

$$2^{k_x} \leq x < 2^{k_x+1},$$

il vient par croissance de ϑ :

$$\vartheta(x) \leq \vartheta(2^{k_x+1}) \leq 2^{k_x+1} \log 4 \leq x \log 4.$$

□

La formule d'Euler $\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ garantit, grâce aux propriétés générales des produits infinis convergents de fonctions holomorphes, que $\zeta(s) \neq 0$, quel que soit $\operatorname{Re} s > 1$. L'énoncé suivant est un point-clé.

Lemme 2.4. *Hors du pôle $\{s = 1\}$, la fonction ζ , holomorphe dans $\{\operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$, ne s'annule jamais sur $\{\operatorname{Re} s = 1\}$:*

$$\zeta(1 + it) \neq 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R}^*).$$

Rappelons que :

$$\Phi(s) := \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\log p}{p^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1).$$

Démonstration. Pour $\operatorname{Re} s > 1$, une dérivée logarithmique du produit $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$ donne :

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\log(1 - e^{-s \log p}) \right)' = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{p^{-s} \log p}{1 - p^{-s}} \\ (2.5) \qquad \qquad \qquad &= \Phi(s) + \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}. \end{aligned}$$

Pour tout $c > \frac{1}{2}$, cette dernière somme converge normalement-uniformément sur $\{\operatorname{Re} s \geq c\}$, donc définit une fonction-reste holomorphe dans $\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$.

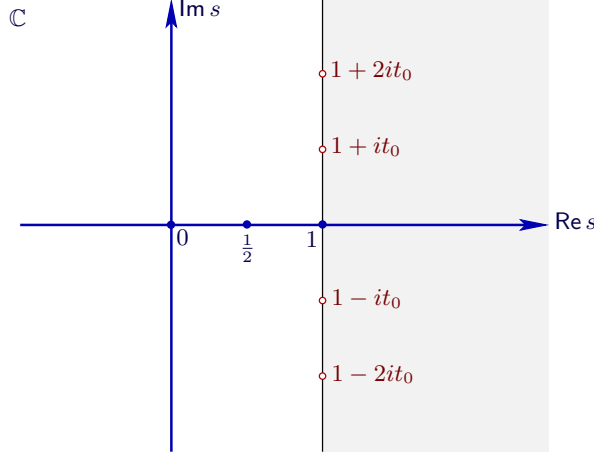
Dans l'éventualité où $\zeta(s)$ a un zéro en un point $s_0 = 1 + it_0$ avec $t_0 \neq 0$:

$$\zeta(s) = (s - s_0)^{\mu_0} \eta(s),$$

avec $\mu_0 \geq 1$ entier, et avec $\eta(s)$ holomorphe au voisinage de s_0 satisfaisant $\eta(s_0) \neq 0$, il vient :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{\mu_0}{s - s_0} + \text{reste holomorphe} \quad (s \sim s_0).$$

Par conséquent, $\Phi(s)$ se prolonge méromorphiquement à un voisinage ouvert de $\{\operatorname{Re} s \geq 1\}$, avec des pôles d'ordre 1 en tous les zéros de ζ sur $\{\operatorname{Re} s = 1\} \setminus \{1\}$, et aussi un pôle d'ordre 1 en $s = 1$, puisque $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$, d'où $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \sim \frac{1}{s-1}$.



Pour aboutir à une contradiction, un raisonnement particulièrement astucieux consiste à regarder aussi le point $1 + 2it_0$, en lequel ζ a un certain ordre d'annulation $\nu_0 \geq 0$.

Puisque la relation $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$, valable pour $\operatorname{Re} s > 1$, est héritée par continuité via le Lemme 2.2 sur la droite épointée $\{\operatorname{Re} s = 1\} \setminus \{1\}$, la fonction ζ a les mêmes ordres d'annulation en $1 + it$ et en $1 - it$, quel que soit $t \neq 0$. Ainsi :

$$1 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \left(-\frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} \right), \quad -\mu_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \left(-\frac{\zeta'(1+\varepsilon \pm it_0)}{\zeta(1+\varepsilon \pm it_0)} \right),$$

$$-\nu_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \left(-\frac{\zeta'(1+\varepsilon \pm 2it_0)}{\zeta(1+\varepsilon \pm 2it_0)} \right),$$

d'où par holomorphie du reste dans (2.5) :

$$1 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Phi(1+\varepsilon), \quad -\mu_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Phi(1+\varepsilon \pm it_0),$$

$$-\nu_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Phi(1+\varepsilon \pm 2it_0).$$

Le point-clé de l'astuce est alors la reconstitution algébrique d'une puissance quatrième positive :

$$\begin{aligned} \sum_{-2 \leq l \leq 2} \binom{4}{2+l} \Phi(1+\varepsilon + ilt_0) &= \sum_{-2 \leq l \leq 2} \binom{4}{2+l} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon+ilt_0}} \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \sum_{-2 \leq l \leq 2} \binom{4}{2+l} \left(\frac{1}{p^{it_0/2}} \right)^{l+2} \left(\frac{1}{p^{-it_0/2}} \right)^{-l+2} \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \left(p^{it_0/2} + p^{-it_0/2} \right)^4 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

car en appliquant alors $\lim_{\varepsilon \searrow 0} (\cdot)$ à cette inégalité :

$$-\nu_0 - 4\mu_0 + 6 - 4\mu_0 - \nu_0 \geq 0,$$

on déduit que $\mu_0 = 0$ nécessairement (exercice visuel). En définitive, $\zeta(1 + it) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$. $\square$

La formule produit du Lemme 2.1 garantit que $\zeta(s)$ n'a aucun zéro dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$. Avec le Lemme 2.4 qui précède, nous déduisons que ζ n'a aucun zéro dans un voisinage ouvert du demi-plan fermé $\{\operatorname{Re} s \geq 1\}$.

Lemme 2.6. *La fonction :*

$$\Phi(s) - \frac{1}{s-1} := \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\log p}{p^s} - \frac{1}{s-1}$$

est holomorphe dans un voisinage ouvert de $\{\operatorname{Re} s \geq 1\}$.

Démonstration. En revenant à (2.5), cela est clair par construction, puisque ζ n'a aucun zéro sur $\{\operatorname{Re} s = 1\} \setminus \{1\}$, et puisque $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \sim \frac{1}{s-1}$ en $s \sim 1$. $\square$

Attention ! Dès que $\zeta(s_0) = 0$ possède un zéro de partie réelle $0 < \operatorname{Re} s_0 < 1$ éventuellement très proche de 1, la fonction $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ possède un *pôle* en $s = s_0$, donc le Lemme 2.1 ne donne aucun contrôle explicite sur le voisinage ouvert de $\{\operatorname{Re} s \geq 1\}$ dans lequel $\Phi(s)$ est holomorphe via (2.5).

Lemme 2.7. *L'intégrale :*

$$\int_1^\infty \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx$$

converge.

Démonstration. Pour $\operatorname{Re} s > 1$, une intégration par parties dans l'intégrale de Riemann-Stieltjes donne :

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\log p}{p^s} = \int_1^\infty \frac{d\vartheta(x)}{x^s} \\ \text{[Lemme 2.3]} \quad &= \left[\frac{\vartheta(x)}{x^s} \right]_1^\infty + s \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}} dx \\ [x = e^t] \quad &= 0 + s \int_0^\infty e^{-st} \vartheta(e^t) dt. \end{aligned}$$

Introduisons la fonction :

$$f(t) := \frac{\vartheta(e^t)}{e^t} - 1 \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

constante par morceaux, donc localement intégrable, et bornée en vertu du Lemme 2.3 :

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Introduisons aussi, pour $\operatorname{Re} z > 0$:

$$g(z) := \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}.$$

Le Lemme 2.6 garantit que g se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert dans $\mathbb{C}$ de $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$. De plus, un calcul simple fait voir, pour $\operatorname{Re} z > 0$, que :

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-(z+1)t} \vartheta(e^t) dt - \int_0^\infty e^{-zt} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\vartheta(e^t) e^{-t} - 1 \right) e^{-zt} dt \\ &= \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt. \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème suivant, dont la démonstration est repoussée à une section ultérieure, sont vérifiées.

Théorème 2.8. *Sur $[0, \infty[$, soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Si la fonction :*

$$g(z) := \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt,$$

holomorphe dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert dans $\mathbb{C}$ du demi-plan fermé $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$, alors $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) dt$ existe et vaut :

$$g(0) = \int_0^\infty f(t) dt.$$

On conclut alors bien que l'intégrale :

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^\infty f(t) dt = \int_0^\infty \left(\vartheta(e^t) e^{-t} - 1 \right) dt \\ &= \int_1^\infty \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

existe. □

Le septième et dernier lemme capital précise ce que cachait la constante C du Lemme 2.3.

Lemme 2.9. *Asymptotiquement quand $x \rightarrow \infty$, on a :*

$$\vartheta(x) \sim x.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que pour un $\lambda > 1$, il existe une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ avec $x_n \rightarrow \infty$ telle que :

$$\vartheta(x_n) \geq \lambda x_n \quad (\forall n \geq 1).$$

Comme ϑ croît, pour tout $t \geq x_n$, on a $\vartheta(t) \geq \vartheta(x_n) \geq \lambda x_n$, ce qui conduit à un jeu contradictoire d'inégalités :

$$0 \underbrace{\longleftarrow}_{\text{Lemme 2.7}} \int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \geq \int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{\lambda x_n - t}{t^2} dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2} du > 0.$$

De manière similaire, si pour un $\lambda < 1$, avec $x_n \rightarrow \infty$, on avait $\vartheta(x_n) \leq \lambda x_n$ quel que soit $n \geq 1$, d'où $\vartheta(t) \leq \vartheta(x_n) \leq \lambda x_n$ pour $t \leq x_n$, ceci impliquerait aussi contradiction :

$$0 \underbrace{\longleftarrow}_{\text{Lemme 2.7}} \int_{\lambda x_n}^{x_n} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \leq \int_{\lambda x_n}^{x_n} \frac{\lambda x_n - t}{t^2} dt = \int_\lambda^1 \frac{\lambda - u}{u^2} du < 0. \quad \square$$

Fin de la démonstration du Théorème 1.1. En partant de l'inégalité (non fine) :

$$\vartheta(x) = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x}} \log p \leq \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x}} \log x = \pi(x) \log x,$$

il vient premièrement grâce à l'information cruciale $x \sim \vartheta(x)$ du Lemme 2.9 :

$$\frac{x}{\log x} \sim \frac{\vartheta(x)}{\log x} \leq \pi(x).$$

Pour l'inégalité inverse, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit :

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &\geq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} \log p \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} \log x^{1-\varepsilon} \\ &= \left[\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon}) \right] (1-\varepsilon) \log x \\ [-\pi(y) \geq -y] \quad &\geq \left[\pi(x) - x^{1-\varepsilon} \right] (1-\varepsilon) \log x, \end{aligned}$$

et donc deuxièmement :

$$\frac{x}{\log x} \sim \frac{\vartheta(x)}{\log x} \geq (1-\varepsilon) \left[\pi(x) - x^{1-\varepsilon} \right],$$

et comme $x^{1-\varepsilon}$ est négligeable devant $\frac{x}{\log x}$ lorsque $x \rightarrow \infty$, ceci conclut. $\square$

3. Démonstration du théorème analytique

Il ne reste plus qu'à démontrer le Théorème 2.8, dont nous recopions l'énoncé.

Théorème 3.1. Sur $[0, \infty[$, soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Si la fonction :

$$g(z) := \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt,$$

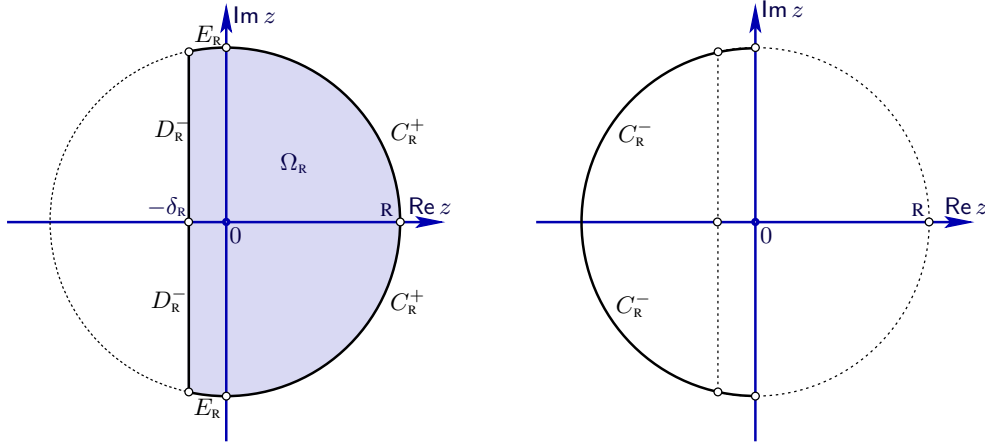
holomorphe dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert dans $\mathbb{C}$ du demi-plan fermé $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$, alors $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) dt$ existe et vaut :

$$g(0) = \int_0^\infty f(t) dt.$$

Démonstration. Pour $T > 0$, la fonction :

$$g_T(z) := \int_0^T f(t) e^{-zt} dt$$

est clairement holomorphe entière en $z \in \mathbb{C}$. On doit montrer que $\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(0)$ existe, et vaut $g(0)$.



Soit un rayon $R \gg 1$, et soit l'ouvert :

$$\Omega_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Re} z > -\delta_R\},$$

où $\delta_R > 0$ est choisi assez petit pour que g soit holomorphe au voisinage de sa fermeture $\overline{\Omega}_R$. Sa frontière $\partial\Omega_R = D_R^- \cup E_R \cup C_R^+$ se décompose en :

$$D_R^- := \{|z| \leq R, \operatorname{Re} z = -\delta_R\},$$

$$E_R := \{|z| = R, -\delta_R \leq \operatorname{Re} z \leq 0\},$$

$$C_R^+ := \{|z| = R, \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

Avec le poids astucieux utile plus tard $e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$ sans pôle, le théorème des résidus de Cauchy donne :

$$\begin{aligned} g(0) - g_T(0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega_R} (g(z) - g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{D_R^-} + \int_{E_R} + \int_{C_R^+} \right). \end{aligned}$$

Il s'agit de démontrer que ces trois intégrales tendent vers 0 quand $T \rightarrow \infty$.

Lemme 3.2. Sur le demi-cercle $C_R^+ \ni z$, l'intégrande est borné par :

$$\left| (g(z) - g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| \leq \frac{2\|f\|_{L^\infty}}{R R}.$$

Démonstration. En tout point $z \in C_R^+$ avec $\operatorname{Re} z > 0$:

$$\begin{aligned} |g(z) - g_T(z)| &= \left| \int_T^\infty f(t) e^{-zt} dt \right| \leq \|f\|_{L^\infty} \int_T^\infty e^{-t \operatorname{Re} z} dt \\ &= \|f\|_{L^\infty} \frac{e^{-T \operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z}. \end{aligned}$$

Ensuite, comme $\frac{z}{R} = e^{i\theta}$ avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| &= |e^{zT}| \cdot |1 + e^{2i\theta}| \cdot \frac{1}{R} = e^{T \operatorname{Re} z} |e^{-i\theta} + e^{i\theta}| \frac{1}{R} = e^{T \operatorname{Re} z} \left| 2 \operatorname{Re} \frac{z}{R} \right| \frac{1}{R} \\ &\leq \frac{2 e^{T \operatorname{Re} z} \operatorname{Re} z}{R R}. \end{aligned}$$

Une multiplication de ces deux majorations conclut. $\square$

Grâce à cela, avec $\int_{C_R^+} |dz| = \pi R$, on majore la troisième intégrale par une quantité qui tend vers zéro :

$$(3.3) \quad \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R^+} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \pi R \frac{2 \|f\|_{L^\infty}}{R R} \\ = \frac{\|f\|_{L^\infty}}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Maintenant, pour les deux intégrales sur D_R^- et sur E_R , on traite $g(z)$ et $g_T(z)$ séparément dans $(g(z) - g_T(z))$.

Puisque $g_T(z) = \int_0^T f(t) e^{-zt} dt$ est holomorphe entière, grâce à Cauchy, le contour d'intégration $D_R^- \cup E_R$ peut être remplacé par le demi-cercle :

$$C_R^- := \{|z| = R, \operatorname{Re} z \leq 0\},$$

à savoir :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{D_R^- \cup E_R} (-g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R^-} (\text{même intégrande}).$$

Or pour $\operatorname{Re} z < 0$, on a :

$$|g_T(z)| \leq \|f\|_{L^\infty} \int_0^T e^{-t \operatorname{Re} z} dt \leq \|f\|_{L^\infty} \int_{-\infty}^T e^{-t \operatorname{Re} z} dt \\ = \|f\|_{L^\infty} \frac{e^{-T \operatorname{Re} z}}{|\operatorname{Re} z|},$$

et alors exactement la même estimée qu'à l'instant donne :

$$(3.4) \quad \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R^-} (-g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^\infty} \int_{C_R^-} \frac{e^{-T \operatorname{Re} z}}{|\operatorname{Re} z|} \frac{2 e^{T \operatorname{Re} z} |\operatorname{Re} z|}{R R} |dz| \\ = \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^\infty} \frac{2}{R R} \pi R \\ = \frac{\|f\|_{L^\infty}}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Il reste à contrôler :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{D_R^- \cup E_R} (g(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}.$$

Il y a ici le produit d'une fonction indépendante de T , holomorphe au voisinage de $D_R^- \cup E_R$, donc intégrable, par la fonction e^{zT} dépendant de T , de module ≤ 1 , et satisfaisant :

$$|e^{zT}| \leq e^{T \operatorname{Re} z} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (\forall \operatorname{Re} z < 0),$$

donc le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne :

$$(3.5) \quad 0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{D_R^- \cup E_R} (g(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}.$$

Au total, ces trois majorations (3.3), (3.4), (3.5) offrent :

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} |g(0) - g_T(0)| \leq \frac{\|f\|_{L^\infty}}{R} + \frac{\|f\|_{L^\infty}}{R} + 0,$$

et comme $R \gg 1$ pouvait être choisi arbitrairement grand, c'est terminé ! $\square$

4. Exercices

Exercice 1. EE

Exercice 2. EE

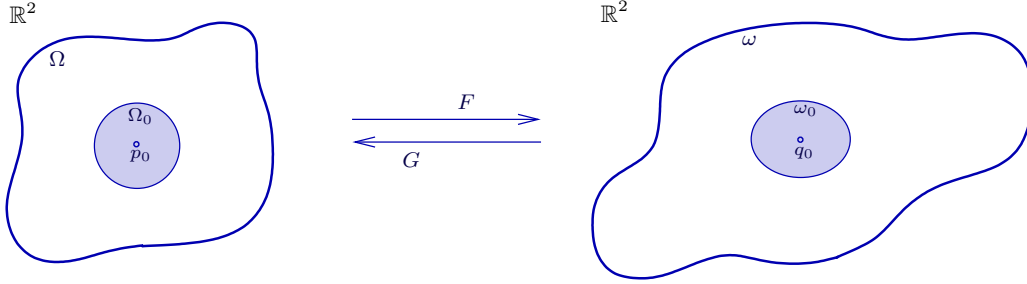
Théorème de l'application conforme de Riemann

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

2. Théorèmes d'inversion locale et globale dans $\mathbb{R}^2$

Dans deux plans euclidiens distincts pour lesquels on notifie des coordonnées courantes $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$ et $\mathbb{R}^2 \ni (u, v)$, soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à gauche et soit un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^2$ à droite.



Soit un entier $k \geq 1$, et soit une application de classe $\mathcal{C}^k$:

$$F: \Omega \longrightarrow \omega.$$

Soit un point fixé $p_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, et soit $q_0 := F(p_0) =: (u_0, v_0)$ le point-image.

Si nous écrivons les deux composantes de F comme :

$$F(x, y) =: (U(x, y), V(x, y)),$$

la *matrice jacobienne* de F en un point quelconque $(x, y) \in \Omega$ est :

$$\text{Jac}_F(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} (x, y).$$

Les résultats de cette section, présentés ici à titre de rappel et par souci de complétude dans la pensée, seront considérés comme provenant d'un autre cours de mathématiques, et par conséquent, nous nous dispenserons de les redémontrer. Puisqu'il importe au plus haut point d'en comprendre le contenu géométrique sous-jacent, nous tracerons des figures afin d'éveiller l'intuition du lecteur au sujet de la nature des *transformations ponctuelles* entre ouverts de $\mathbb{R}^2$. Il faut s'imaginer des taches d'huile extensibles et compressibles, se déformant sans déchirement dans le plan.

Théorème 2.1. [d'inversion locale dans $\mathbb{R}^2$] Si $\det \text{Jac}_F(p_0) \neq 0$, à savoir si :

$$0 \neq \begin{vmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{vmatrix} (p_0),$$

alors il existe un voisinage ouvert $p_0 \in \Omega_0 \subset \Omega$ en restriction auquel :

$$F|_{\Omega_0} : \Omega_0 \xrightarrow{\sim} F(\Omega_0) =: \omega_0,$$

est bijective, homéomorphe sur son image, et d'application inverse :

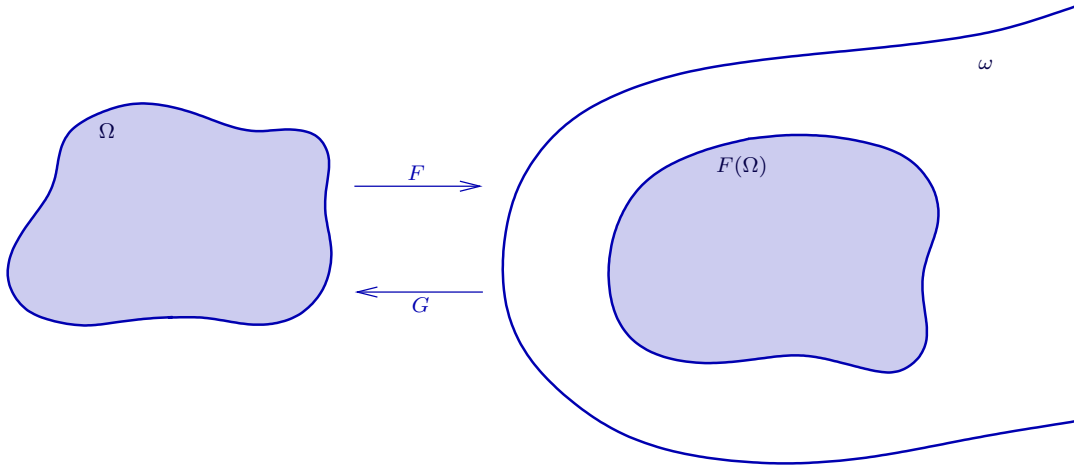
$$\Omega_0 \xleftarrow{\sim} \omega_0 : G,$$

elle aussi de classe $\mathcal{C}^k$ et de déterminant jacobien non nul :

$$0 \neq \det \text{Jac}_G(q_0).$$

□

Principalement, l'argument repose sur un théorème itératif de type « point fixe à la Picaud ». Si la condition de non-annulation du déterminant jacobien est satisfaite en tout point, le résultat se globalise.



Théorème 2.2. [d'inversion globale dans $\mathbb{R}^2$] Si $F: \Omega \longrightarrow \omega$ est une application de classe $\mathcal{C}^{k \geq 1}$ entre deux ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\omega \subset \mathbb{R}^2$ qui est injective et satisfait :

$$0 \neq \det \text{Jac}_F(x, y) \quad (\forall (x, y) \in \Omega),$$

alors F est un homéomorphisme $\Omega \xrightarrow{\sim} F(\Omega) \subset \omega$ sur son image, d'inverse :

$$\Omega \xleftarrow{\sim} F(\Omega) : G,$$

aussi de classe $\mathcal{C}^k$, ayant aussi un déterminant jacobien non nul :

$$0 \neq \det \text{Jac}_G(u, v),$$

en tout point $(u, v) \in F(\Omega)$.

□

On dit alors que $F: \Omega \xrightarrow{\sim} \omega$ est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de Ω sur ω .

3. Inversion holomorphe

Maintenant, quand $F = f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est une application réelle entre ouverts de $\mathbb{R}^2$ induite par une fonction holomorphe, décomposée en parties réelle et imaginaire sous la forme :

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y),$$

les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} && \text{en abrégé} && u_x = v_y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} && \text{en abrégé} && u_y = -v_x, \end{aligned}$$

permettent d'écrire une expression de la dérivée de f :

$$f'(z) = u_z + i v_z = \frac{1}{2} u_x - \frac{i}{2} u_y + \frac{i}{2} v_x + \frac{1}{2} v_y = u_x + i v_y,$$

et impliquent, comme nous l'avons déjà vu, que le déterminant jacobien de la transformation réelle associée $F(x, y) := (u(x, y), v(x, y))$ prend une forme simplifiée agréable :

$$\begin{aligned} \det \text{Jac}_F &= u_x v_y - u_y v_x \\ &= (u_x)^2 + (u_y)^2 \\ &= |f'(z)|^2. \end{aligned}$$

Rappelons que les fonctions holomorphes sont $\mathcal{C}^\infty$, donc les deux Théorèmes 2.1 et 2.2 s'appliquent aux fonctions holomorphes $f = F$, vues comme applications réelles à deux variables. Mais naturellement, la question de pose de savoir si l'inverse réel local ou global G dont nous venons de rappeler l'existence correspond à une fonction *holomorphe*. La réponse est positive, et elle nécessite un auxiliaire technique.

Lemme 3.1. *Soient trois ouverts $\Omega, \omega, \varpi \subset \mathbb{R}^2$ et soient deux applications $\mathcal{C}^\infty$ composables :*

$$\begin{aligned} \Omega &\xrightarrow{F} \omega \xrightarrow{G} \varpi \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y) \\ (u, v) &\longmapsto G(u, v). \end{aligned}$$

Alors leurs dérivées partielles complexes par rapport aux variables $z = x + i y$ de Ω et $w = u + i v$ de ω satisfont :

$$\begin{aligned} (G \circ F)_z &= G_w \cdot F_z + G_{\bar{w}} \cdot \bar{F}_z, \\ (G \circ F)_{\bar{z}} &= G_w \cdot F_{\bar{z}} + G_{\bar{w}} \cdot \bar{F}_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Bien entendu, la classe de différentiabilité $\mathcal{C}^1$ suffit pour que l'énoncé soit vrai.

Démonstration. Pour traiter la première ligne, notons parties réelle et imaginaire de F comme ci-dessus :

$$F(x, y) = U(x, y) + i V(x, y),$$

et dérivons la composée $G \circ F$ par rapport à z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} [G \circ F(x, y)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) G(U(x, y), V(x, y)) \\ &= \frac{1}{2} [G_u U_x + G_v V_x - i G_u U_y - i G_v V_y]. \end{aligned}$$

Ensuite, utilisons :

$$\begin{aligned} \partial_u &= \partial_w + \partial_{\bar{w}}, & \partial_x &= \partial_z + \partial_{\bar{z}}, \\ \partial_v &= i \partial_w - i \partial_{\bar{w}}, & \partial_y &= i \partial_z - i \partial_{\bar{z}}, \end{aligned}$$

pour remplacer puis calculer de manière détaillée :

$$\begin{aligned} (G \circ F)_z &= \frac{1}{2} \left[(G_w + G_{\bar{w}})(U_z + U_{\bar{z}}) + (i G_w - i G_{\bar{w}})(V_z + V_{\bar{z}}) - \right. \\ &\quad \left. - i (G_w + G_{\bar{w}})(i U_z - i U_{\bar{z}}) - i (i G_w - i G_{\bar{w}})(i V_z - i V_{\bar{z}}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[G_w U_z + \underline{G_w U_{\bar{z}}}_o + G_{\bar{w}} U_z + \underline{G_{\bar{w}} U_{\bar{z}}}_o + i G_w V_z + \underline{i G_w V_{\bar{z}}}_o - i G_{\bar{w}} V_z - \underline{i G_{\bar{w}} V_{\bar{z}}}_o + \right. \\ &\quad \left. + G_w U_z - \underline{G_w U_{\bar{z}}}_o + G_{\bar{w}} U_z - \underline{G_{\bar{w}} U_{\bar{z}}}_o + i G_w V_z - \underline{i G_w V_{\bar{z}}}_o - i G_{\bar{w}} V_z + \underline{i G_{\bar{w}} V_{\bar{z}}}_o \right] \\ &= G_w U_z + G_{\bar{w}} U_z + i G_w V_z - i G_{\bar{w}} V_z \\ &= G_w (U_z + i V_z) + G_{\bar{w}} (U_z - i V_z) \\ &= G_w F_z + G_{\bar{w}} \bar{F}_z. \end{aligned}$$

Le traitement de la deuxième ligne est évidemment en tous points analogue. $\square$

Maintenant, en revenant à l'inversion (locale ou globale), écrivons l'identité :

$$z \equiv G(f(z)),$$

qui exprime, que la fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, vue comme application réelle, admet un difféomorphisme inverse *réel* :

$$\Omega \xleftarrow{\sim} f(\Omega) : G,$$

et appliquons ce lemme auxiliaire pour dériver cette identité par rapport à $\bar{z}$:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv G_w \cdot \underline{f_{\bar{z}}}_o + G_{\bar{w}} \bar{f}_{\bar{z}} \\ &\equiv 0 + G_{\bar{w}} \bar{f}_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Or comme les fonctions holomorphes sont localement des séries entières $\sum a_n (z - z_0)^n$ pour lesquelles conjugaison et dérivation commutent, on reconnaît :

$$\bar{f}_{\bar{z}} = \overline{f_z} \neq 0 \quad (\text{hypothèse}),$$

et donc :

$$0 \equiv G_{\bar{w}} \quad (\forall w \in f(\Omega)),$$

ce qui montre que l'inverse G de la fonction holomorphe f est bel est bien *holomorphe* lui aussi ! Énonçons ce résultat avec cette information supplémentaire agréable.

Théorème 3.2. [d'inversion holomorphe locale et globale] Soit $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(1) En tout point $z_0 \in \Omega$ où $f'(z_0) \neq 0$, il existe un (petit) voisinage ouvert $\Omega_0 \subset \Omega$ en restriction auquel $f|_{\Omega_0}: \Omega_0 \xrightarrow{\sim} f(\Omega_0)$ établit un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme sur son image $f(\Omega_0)$, qui a pour inverse :

$$\Omega_0 \xleftarrow{\sim} f(\Omega_0) : g,$$

une application $\mathcal{C}^\infty$ holomorphe dans $f(\Omega_0)$ satisfaisant $g'(w_0) \neq 0$ au point-image $w_0 := f(z_0)$.

(2) Si $f'(z) \neq 0$ en tout point $z \in \Omega$ et si de plus f est globalement injective, alors f établit un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme $\Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ sur son image, et admet pour inverse une fonction holomorphe :

$$\Omega \xleftarrow{\sim} f(\Omega) : g,$$

qui satisfait aussi :

$$0 \neq g'(w) \quad (\forall w \in f(\Omega)). \quad \square$$

Ces faits conduisent naturellement à une conceptualisation nouvelle.

Définition 3.3. Un biholomorphisme :

$$f: \Omega \xrightarrow{\sim} \omega$$

entre deux ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $\omega \subset \mathbb{C}$ est une application satisfaisant :

- (1) $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et établit une bijection $\Omega \xrightarrow{\sim} \omega$;
- (2) $f'(z) \neq 0$ quel que soit $z \in \Omega$;
- (3) l'application inverse $\Omega \xleftarrow{\sim} \omega : f^{-1}$ est aussi holomorphe est vérifie aussi $(f^{-1})'(w) \neq 0$ quel que soit $w \in \omega$.

Nous venons d'observer ci-dessus que la condition (3) est conséquence de (2). Par ailleurs, puisque dans un cadre réel pour un difféomorphisme $F: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, les deux conditions :

- (1) F injective,
- (2) $\det \text{Jac}_F \neq 0$,

sont indépendantes et nécessaires pour que le Théorème 2.2 soit vrai — exercice : trouver un exemple ! —, on pourrait croire que les deux conditions ci-dessus :

- (1) f injective,
- (2) $f' \neq 0$,

sont elles aussi simultanément nécessaires pour avoir un biholomorphisme, mais il n'en est rien !

Un des objectifs de ce qui va suivre est en effet de démontrer qu'on peut se passer de (2) dans cette définition ! À nouveau, la prestidigitation holomorphe va escamoter une hypothèse :

$$f \text{ holomorphe injective} \implies f' \neq 0.$$

Mais avant de lever la baguette magique, un préliminaire s'impose.

dans laquelle tous les termes d'ordre supérieur de la série entière ont disparu, engloutis !

Démonstration. Factorisons le développement en série entière par la puissance minimale de z :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n z^n & (a_\nu \neq 0) \\ &= z^\nu (a_\nu + O(z)) \\ &=: z^\nu F(z) & (F(0) \neq 0). \end{aligned}$$

Choisissons un rayon $r > 0$ assez petit pour que $F \neq 0$ sur $\mathbb{D}_r$, ce qui est possible par continuité, car $F(0) = a_\nu \neq 0$.

Donc une fonction $\log F(z)$ holomorphe dans $\mathbb{D}_r$ (simplement connexe) existe, et on peut écrire au moyen d'une nouvelle fonction holomorphe $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(z e^{\frac{1}{\nu} \log F(z)} \right)^\nu \\ &=: (h(z))^\nu. \end{aligned}$$

Puisque $h(0) = (a_\nu)^{\frac{1}{\nu}} \neq 0$, pour un choix de racine ν -ième cohérent avec le choix du logarithme, il est clair que :

$$\frac{d}{dz} h(z) \Big|_{z=0} = e^{\frac{1}{\nu} \log F(0)} = (a_\nu)^{\frac{1}{\nu}} \neq 0,$$

et le Théorème 3.2 assure qu'en diminuant $r > 0$, la fonction $h: \mathbb{D}_r \xrightarrow{\sim} h(\mathbb{D}_r)$ établit un biholomorphisme.

Comme sur la figure, soit alors $s > 0$ assez petit pour que $\mathbb{D}_s(0) \subset h(\mathbb{D}_r)$. En notant :

$$g := h^{-1} \Big|_{\mathbb{D}_s},$$

l'équation :

$$f(z) = (h(z))^\nu \quad (\forall z \in \mathbb{D}_r),$$

dans laquelle on remplace $z = g(w)$ avec $w \in \mathbb{D}_s(0)$ offre la conclusion :

$$\begin{aligned} f(g(w)) &= \left(h(g(w)) \right)^\nu \\ &\equiv w^\nu. \end{aligned} \quad \square$$

5. Multiplicités locales et théorème de l'application ouverte

Étant donné une fonction holomorphe quelconque $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ ne contenant pas forcément 0, le théorème précédent s'applique en localisant l'étude au voisinage de *tout* point $z_0 \in \Omega$, à condition de translater z_0 pour qu'il devienne l'origine et de soustraire $f(z_0)$:

$$f(z + z_0) - f(z_0).$$

Puisque cette fonction holomorphe s'annule en $z = 0$, on peut parler de son ordre d'annulation en $z = 0$.

Définition 5.1. La *multiplicité locale* d'une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ en un point quelconque $z_0 \in \Omega$ au voisinage duquel elle n'est pas constante est l'entier :

$$\mu_f(z_0) := \nu_{f-f(z_0)}(z_0).$$

On a donc toujours :

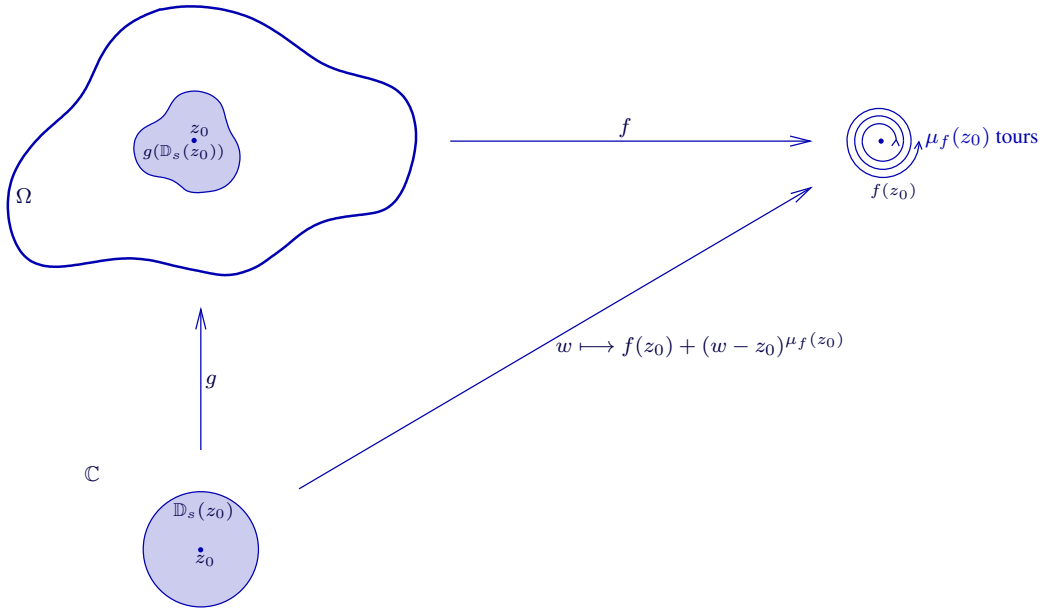
$$1 \leq \mu_f(z_0) < \infty.$$

Observons au passage que :

$$\begin{aligned} (0 \neq f'(z_0) \iff \mu_f(z_0) = 1) &\implies 0 \neq f'(z) \text{ pour } z \text{ proche de } z_0 \\ &\implies \mu_f(z) = 1 \text{ pour } z \text{ proche de } z_0, \end{aligned}$$

grâce à une lecture du développement :

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=\mu_f(z_0)}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n.$$



Théorème 5.2. Dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une fonction holomorphe non constante $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors en tout point $z_0 \in \Omega$, la multiplicité locale de f est finie :

$$1 \leq \mu_f(z_0) < \infty,$$

et elle se lit dans le développement en série entière :

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^{\mu_f(z_0)} \left[a_0 + a_1 (z - z_0) + \cdots \right] \quad (a_0 \neq 0).$$

De plus, il existe un rayon $s > 0$ petit et un biholomorphisme fixant z_0 :

$$g: \mathbb{D}_s(z_0) \xrightarrow{\sim} g(\mathbb{D}_s(z_0)) \subset \Omega$$

tels que :

$$f(g(w)) \equiv f(z_0) + (w - z_0)^{\mu_f(z_0)} \quad (\forall w \in \mathbb{D}_s(z_0)).$$

Autrement dit, après un changement de coordonnée holomorphe locale au voisinage de z_0 , en notant à nouveau z la coordonnée (au lieu de w), on peut voir la fonction f comme étant simplement de la forme :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^{\mu_f(z_0)},$$

sans aucun terme d'ordre supérieur.

Preuve. La fonction translatée :

$$\varphi(z) := f(z + z_0) - f(z_0)$$

satisfait $\varphi(0) = 0$ et $\nu_\varphi(0) = \mu_f(z_0)$. Le Théorème 4.1 qui précède fournit alors un biholomorphisme local $\psi: \mathbb{D}_s(0) \xrightarrow{\sim} \psi(\mathbb{D}_s(0))$ tel que :

$$f(\psi(\zeta) + z_0) - f(z_0) = \varphi(\psi(\zeta)) = \zeta^{\mu_f(z_0)} \quad (\forall \zeta \in \mathbb{D}_s(0)).$$

Translatons à présent la variable :

$$\zeta =: w - z_0,$$

et abrégeons :

$$\psi(w - z_0) + z_0 =: g(w),$$

pour obtenir comme annoncé :

$$f(g(w)) - f(z_0) = (w - z_0)^{\mu_f(z_0)}. \quad \square$$

Juste pour le plaisir, voici un dernier corollaire de la normalisabilité locale des fonctions holomorphes. Rappelons qu'une application $\tau: X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques est dite *ouverte* si l'image par τ de tout ouvert de X est encore un ouvert de Y . On montre (exercice de révision) qu'il suffit que cela soit satisfait localement au voisinage de chaque point $x \in X$.

Théorème 5.3. [de l'application ouverte] *Une application holomorphe non constante $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ est toujours ouverte.*

Preuve. D'après ce qui précède, cela revient à vérifier que chaque application normalisée :

$$z \mapsto z^\mu,$$

où $\mu \geq 1$ est un entier, est ouverte en 0, ce qui est manifestement vrai, puisqu'un (petit) disque centré en 0 de rayon $r > 0$ est envoyé surjectivement sur le disque ouvert de rayon strictement positif $r^\mu > 0$. $\square$

6. Fonctions holomorphes injectives : théorème fondamental

Tout le décor est en place, maintenant, pour lever le rideau sur un phénomène exceptionnel : l'injectivité, dans l'univers holomorphe, implique la non-annulation de la dérivée, ce qui est faux dans le monde réel, comme le montre l'exemple simple de $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$.

Théorème 6.1. *Soit une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si f est localement injective en un point $z_0 \in \Omega$ au sens où il existe un voisinage ouvert $\Omega_0 \subset \Omega$ en restriction auquel $f|_{\Omega_0}$ est injective, alors $\mu_f(z_0) = 1$, c'est-à-dire $f'(z_0) \neq 0$.*

Démonstration. On sait que $1 \leq \mu_f(z_0) < \infty$. Supposons par l'absurde que $2 \leq \mu_f(z_0)$. Alors un changement biholomorphe (donc bijectif) de coordonnée locale que fournit le Théorème 5.2 normalise :

$$f(g(w)) = f(z_0) + (w - z_0)^{\mu_f(z_0)}.$$

Mais pour $\mu \geq 2$, l'application $w - z_0 \mapsto (w - z_0)^\mu$ n'est *jamais* injective, comme on le voit en passant aux coordonnées polaires $w = z_0 + r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ petit et avec $0 \leq \theta < 2\pi$, puisque c'est :

$$r e^{i\theta} \mapsto r^\mu e^{i\mu\theta},$$

et l'application $\theta \mapsto \mu \theta$ du cercle unité $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans lui-même est *non* injective, puisque tout point possède exactement $\mu \geq 2$ préimages. $\square$

Être globalement injectif implique être localement injectif, donc un corollaire direct — et spectaculaire ! — est le :

Théorème 6.2. *Si une fonction holomorphe $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, est globalement injective, alors :*

$$\boxed{f'(z) \neq 0} \quad (\forall z \in \Omega).$$

Preuve. Le théorème qui précède donne $\mu_f(z) = 1$, en *tout* point, et nous avons vu plus haut que ceci équivaut à $f'(z) \neq 0$. $\square$

Si nous revenons à la Définition 3.3, nous constatons — enfin ! que la condition (2) peut être éliminée.

Voici ce qu'il faut retenir.

Théorème 6.3. [Fondamental] *Si une fonction holomorphe $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est injective, alors elle établit un biholomorphisme global sur son image :*

$$f: \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega). \quad \square$$

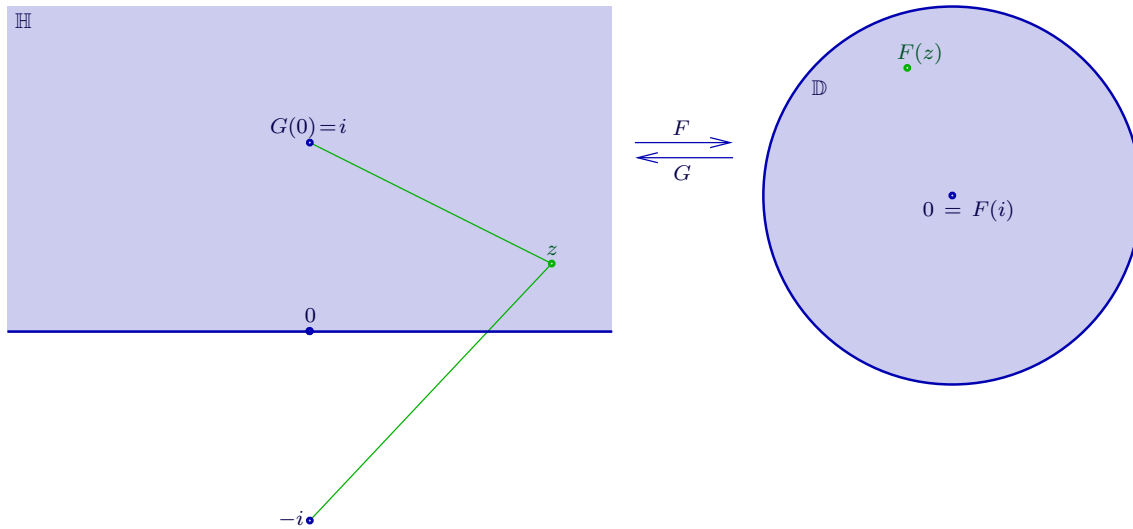
7. Équivalence entre le disque unité $\mathbb{D}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$

Le *demi-plan de Poincaré* consiste en les points du plan complexe dont la partie imaginaire est strictement positive :

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Un fait mathématique remarquable et surprenant est que $\mathbb{H}$ est biholomorphe au disque unité $\mathbb{D}$, grâce à des formules explicites simples. Introduisons en effet les deux applications rationnelles :

$$F(z) := \frac{i - z}{i + z} \quad \text{et} \quad G(w) := i \frac{1 - w}{1 + w}.$$



Théorème 7.1. *L'application $F: \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ établit un biholomorphisme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$ d'inverse $\mathbb{H} \xleftarrow{\sim} \mathbb{D} : G$.*

Démonstration. Commençons par observer (visuellement) que F et G sont holomorphes dans $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$, puisque leurs pôles $i \notin \mathbb{H}$ et $-i \notin \mathbb{D}$ n'y appartiennent pas.

Comme la figure l'indique, un point quelconque $z \in \mathbb{H}$ est toujours plus proche de i que de $-i$, donc on a une inégalité :

$$|F(z)| = \frac{|i - z|}{|i + z|} < 1,$$

qui fait voir géométriquement que F envoie $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{D}$.

Pour voir que G envoie inversement $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{H}$, en notant $w = u + iv \in \mathbb{D}$, vérifions par un calcul la positivité de :

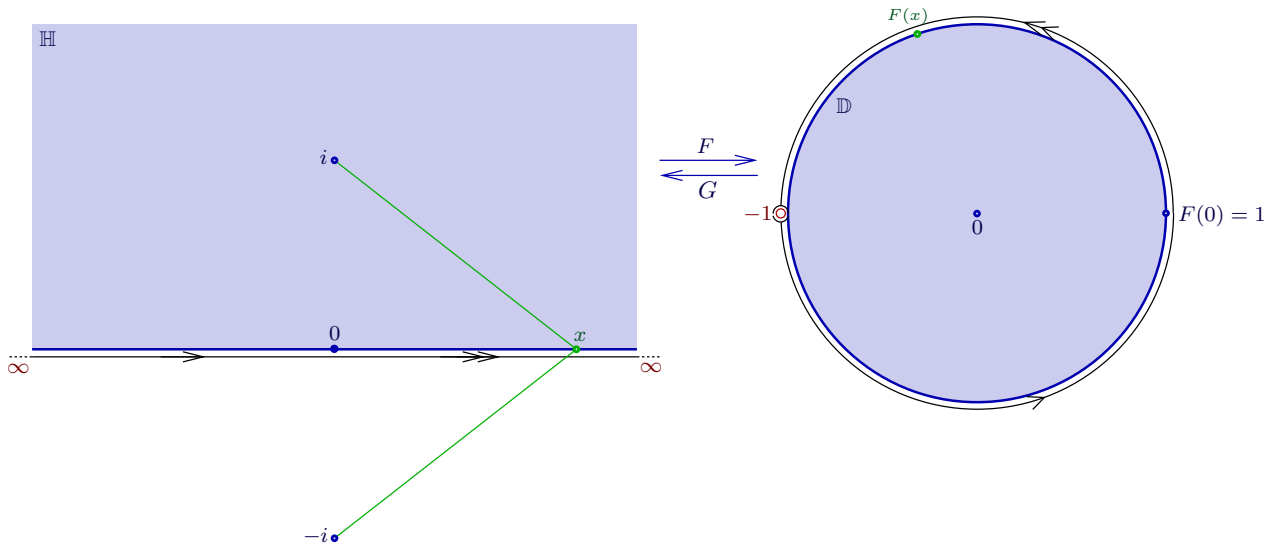
$$\begin{aligned} \operatorname{Im} G(w) &= \operatorname{Re} \frac{1 - u - iv}{1 + u + iv} \\ &= \operatorname{Re} \frac{(1 - u - iv)(1 + u - iv)}{(1 + u)^2 + v^2} \\ &= \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 + u)^2 + v^2} \\ &> 0. \end{aligned}$$

$[u + iv \in \mathbb{D}]$

Enfin, vérifions que $F \circ G = \operatorname{Id}_{\mathbb{D}}$ et que $G \circ F = \operatorname{Id}_{\mathbb{H}}$, ce qui établira la bijectivité et conclura :

$$\begin{aligned} F(G(w)) &= \frac{i - i \frac{1-w}{1+w}}{i + i \frac{1-w}{1+w}} = \frac{1 + w - 1 + w}{1 + w + 1 - w} = w, \\ G(F(z)) &= i \frac{1 - \frac{i-z}{i+z}}{1 + \frac{i-z}{i+z}} = i \frac{i + z - i + z}{i + z + i - z} = z. \end{aligned}$$

□



Analysons maintenant le comportement de F au bord $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$ du demi-plan supérieur. Comme la seule singularité de F est $z = -i$, sa restriction $F|_{\mathbb{R}}$ est continue, et même $\mathcal{C}^\infty$.

À présent, les distances à $+i$ et à $-i$ d'un point réel quelconque $x \in \mathbb{R}$ sont *égales*, donc :

$$|F(x)| = \frac{|i - x|}{|i + x|} = 1,$$

ce qui fait voir géométriquement que F envoie $\partial\mathbb{H}$ dans le cercle unité $\partial\mathbb{D}$. Mais son image ne recouvre pas tout !

En effet, écrivons :

$$F(x) = \frac{i - x}{i + x} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + i \frac{2x}{1 + x^2},$$

et paramétrons la droite réelle avec $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$x := \tan t.$$

Des réminiscences trigonométriques :

$$\begin{aligned} \sin 2t &= 2 \sin t \cos t = 2 \frac{\sin t}{\cos t} \cos^2 t = \frac{2 \tan t}{1 + \tan^2 t} = \frac{2x}{1 + x^2}, \\ \cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t = \left(1 - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right) \cos^2 t = \frac{1 - \tan^2 t}{1 + \tan^2 t} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \end{aligned}$$

permettent alors de représenter :

$$F(x) = \cos 2t + i \sin 2t = e^{2it} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right),$$

sous une forme qui montre clairement que l'image $F(\mathbb{R})$ recouvre le cercle unité excepté le seul point $\{-1\}$ — qui correspondrait à $t = \pm \frac{\pi}{2}$ — et que F établit un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme :

$$F: \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \partial\mathbb{D} \setminus \{-1\}.$$

Intuitivement, la préimage de ce point manquant -1 devrait être un certain « *point à l'infini* » de $\mathbb{R}$, car :

$$-1 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{i - x}{i + x}.$$

Pour terminer, observons que lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, l'image $F(x)$ voyage dans le sens trigonométrique le long de $\partial\mathbb{D}$.

8. Lemme de Schwarz

Rappelons qu'une *rotation* de $\mathbb{C}$ fixant l'origine est une transformation de la forme :

$$z \mapsto e^{i\theta} z,$$

avec une constante $\theta \in \mathbb{R}$, appelée *angle de rotation*, et définie à un multiple entier de 2π près. L'énonciation et la démonstration du résultat suivant sont simples, mais les conséquences auront une grande portée.

Lemme 8.1. [de Schwarz] Soit une fonction holomorphe $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ du disque unité à valeurs dans lui-même. Si $f(0) = 0$, alors :

- (1) $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$;
- (2) si $|f(z_0)| = |z_0|$ en un $z_0 \in \mathbb{D}$ avec $z_0 \neq 0$, alors $f(z) = e^{i\theta} z$ est une rotation ;
- (3) $|f'(0)| \leq 1$, et s'il y a égalité $|f'(0)| = 1$, alors $f(z) = e^{i\theta} z$ est encore une rotation.

Démonstration. (1) Développons f à l'origine en série entière convergente dans $\mathbb{D}$:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

Puisque $f(0) = 0$, on a $a_0 = 0$, et par conséquent $\frac{f(z)}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{D}$, puisqu'elle a une singularité éliminable en $z = 0$.

Ensuite, pour un rayon $0 < r < 1$ fixé arbitrairement près de 1, comme $|f(z)| < 1$ par hypothèse dans $\mathbb{D}$, il vient sur le cercle C_r :

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{r} \quad (\forall |z| = r),$$

donc le principe du maximum offre la même inégalité dans $\overline{\mathbb{D}}_r$:

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{r} \quad (\forall |z| \leq r),$$

et en faisant $r \nearrow 1$, nous obtenons bien $|f(z)| \leq |z|$ dans $\mathbb{D}$.

(2) Maintenant, si cette fonction holomorphe $\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1$ atteint son maximum $\left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| = 1$ en un point *intérieur non nul* $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, le principe du maximum la force à être constante, disons $f(z) = cz$ avec $c \in \mathbb{C}$, puis $|z_0| = |f(z_0)| = |c| |z_0|$ force $|c| = 1$, donc $f(z) = e^{i\theta} z$ est une rotation.

(3) Abrégeons $\frac{f(z)}{z} =: g(z)$, fonction holomorphe qui satisfait donc $|g(z)| \leq 1$ dans $\mathbb{D}$, et aussi :

$$g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = f'(0),$$

d'où toujours $|f'(0)| \leq 1$.

Pour terminer, si $|f'(0)| = 1 = |g(0)|$, le principe du maximum — encore lui ! — force g à être constante, d'où à nouveau par le même raisonnement $f(z) = e^{i\theta} z$. $\square$

9. Automorphismes du disque unité

Étudions maintenant les biholomorphismes d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ sur lui-même $\omega := \Omega$.

Définition 9.1. Une application biholomorphe $f: \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ sur lui-même est appelée un *automorphisme holomorphe* de Ω . Leur collection sera notée :

$$\text{Aut}_{\text{hol}}(\Omega) := \{f: \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega \text{ biholomorphe}\}.$$

Elle forme un groupe — abstrait ! En effet, l'identité $z \mapsto z$ de $\mathbb{C}$ se restreint en une identité de Ω , la composition est transitive et préserve le caractère biholomorphe, et enfin l'inverse — pour la structure de groupe — de $f: \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega$ est tout simplement le biholomorphisme réciproque $\Omega \xleftarrow{\sim} \Omega : f^{-1}$.

Peut-on décrire $\text{Aut}_{\text{hol}}(\mathbb{D})$?

Visiblement, toute rotation $z \mapsto e^{i\theta} z$ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ fixé est un automorphisme de $\mathbb{D}$, d'inverse la rotation $z \mapsto e^{-i\theta} z$ d'angle opposé.

D'autres automorphismes existent, qui ont une grande utilité dans de nombreux chapitres de l'Analyse Complexe.

Lemme 9.2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha| < 1$, l'application :

$$\psi_\alpha: z \mapsto \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$$

constitue un automorphisme holomorphe du disque unité $\mathbb{D}$.

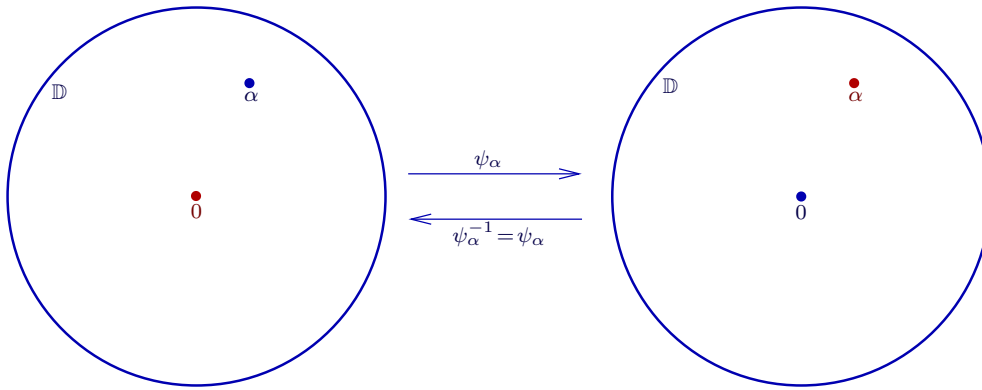
Démonstration. L'unique pôle $\frac{1}{\alpha}$ de $\psi_\alpha(z)$ étant de module $|\frac{1}{\alpha}| > 1$, l'application ψ_α est holomorphe dans $\mathbb{D}$, et même holomorphe dans le voisinage ouvert $\mathbb{D}_{\frac{1}{|\alpha|}} \supset \overline{\mathbb{D}}$ du disque unité fermé.

Sur le bord, pour $z = e^{i\theta}$, récrivons :

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(e^{i\theta}) &= \frac{1}{e^{i\theta}} \frac{\alpha - e^{i\theta}}{e^{-i\theta} - \bar{\alpha}} \\ &=: -\frac{1}{e^{i\theta}} \frac{w}{\bar{w}},\end{aligned}$$

pour faire voir que $|\psi_\alpha(e^{i\theta})| \equiv 1$, puis déduire grâce au principe du maximum que :

$$|\psi_\alpha(z)| < 1 \quad (\forall z \in \mathbb{D}).$$



Enfin, pour vérifier la bijectivité de $\psi_\alpha : \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$, calculons la composition de ψ_α avec elle-même :

$$\begin{aligned}(\psi_\alpha \circ \psi_\alpha)(z) &= \frac{\alpha - \frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}}{1 - \bar{\alpha} \frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}} \\ &= \frac{\alpha - \alpha\bar{\alpha}z - \alpha + z}{1 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}z} \\ &= \frac{(1 - \alpha\bar{\alpha})z}{1 - \alpha\bar{\alpha}} \\ &= z,\end{aligned}$$

pour constater que ψ_α est sa propre inverse ! □

Voici une dernière constatation simple qui présente un grand intérêt géométrique.

Observation 9.3. L'automorphisme $\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}$ du disque unité $\mathbb{D}$ avec $|\alpha| < 1$ échange 0 et α :

$$\psi_\alpha(0) = \alpha \quad \text{et} \quad \psi_\alpha(\alpha) = 0. \quad \square$$

Le résultat principal de cette section dévoile, grâce au Lemme 8.1 de Schwarz, que la combinaison des rotations et des applications ψ_α fournit *tous* les automorphismes holomorphes du disque unité.

Théorème 9.4. Si $f \in \text{Aut}_{\text{hol}}(\mathbb{D})$ est un automorphisme holomorphe de $\mathbb{D}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{D}$ tels que :

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} = e^{i\theta} \psi_\alpha(z).$$

Démonstration. Puisque $f: \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ est bijective, il existe une unique préimage $\alpha \in \mathbb{D}$ de $0 = f(\alpha)$. Introduisons alors l'automorphisme composé :

$$g := f \circ \psi_\alpha,$$

qui satisfait maintenant $g(0) = 0$. Le Lemme 8.1 de Schwarz s'applique donc, et donne :

$$|g(z)| \leq |z| \quad (\forall z \in \mathbb{D}).$$

Mais il s'applique aussi à l'inverse $\mathbb{D} \xleftarrow{\sim} \mathbb{D} : g^{-1}$ satisfaisant $g^{-1}(0) = 0$, pour donner de même :

$$|g^{-1}(w)| \leq |w| \quad (\forall w \in \mathbb{D}),$$

et si nous y remplaçons bêtement $w = g(z)$, nous obtenons une inégalité :

$$|g^{-1}(g(z))| = |z| \leq |g(z)| \quad (\forall w \in \mathbb{D}),$$

inverse de celle qui précède, ce qui force $|g(z)| = |z|$ partout !

La partie (2) du Lemme 8.1 de Schwarz offre alors que $g(z) = e^{i\theta} z$ est une rotation, c'est-à-dire :

$$f(\psi_\alpha(z)) = e^{i\theta} z.$$

Pour terminer, en substituant là-dedans $z := \psi_\alpha(z)$ et en nous souvenant que $\psi_\alpha \circ \psi_\alpha = \text{Id}$, nous concluons :

$$f(z) = f(\psi_\alpha(\psi_\alpha(z))) = e^{i\theta} \psi_\alpha(z). \quad \square$$

Il est clair qu'un tel automorphisme $z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ ne fixe l'origine que lorsque $\alpha = 0$.

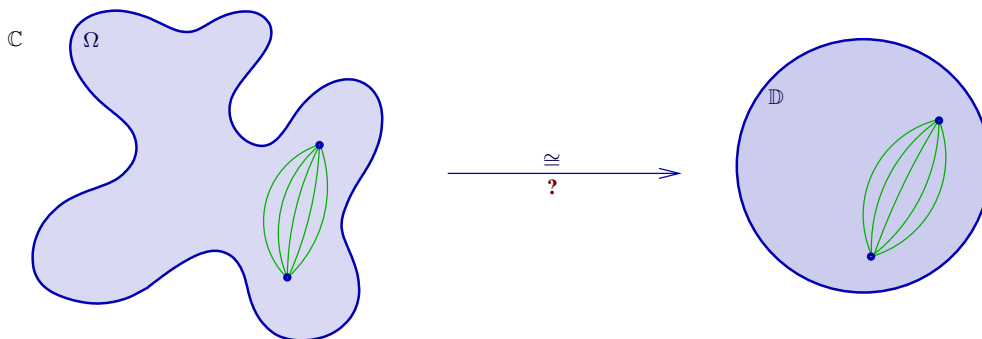
Corollaire 9.5. Les seuls automorphismes holomorphes de $\mathbb{D}$ qui fixent l'origine $0 \in \mathbb{D}$ sont les rotations $z \mapsto e^{i\theta} z$. $\square$

Enfin, étant donné deux points quelconques $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$, on peut envoyer $\alpha \mapsto 0$ au moyen de ψ_α , puis $0 \mapsto \beta$ au moyen de ψ_β , et donc la composition $\psi_\beta \circ \psi_\alpha \in \text{Aut}_{\text{hol}}(\mathbb{D})$ envoie α sur β : passer par Paris pour aller de Marseille à Toulouse, il fallait y penser !

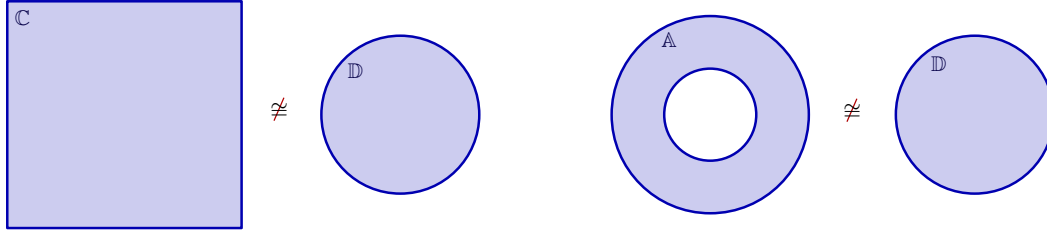
Corollaire 9.6. Le groupe $\text{Aut}_{\text{hol}}(\mathbb{D})$ est transitif. $\square$

10. Présentation du théorème de Riemann

Une question se pose de savoir si un ouvert connexe non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$ peut être « normalisé » au sens où il soit biholomorphiquement équivalent au disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.



Dans le cas où $\Omega = \mathbb{C}$, la réponse est négative, à cause du théorème de Liouville qui force toute application holomorphe $F: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$, donc bornée, à être constante.



Ensuite, l'existence d'un biholomorphisme $F: \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ permet de transférer les homotopies entre courbes dans $\mathbb{D}$ comme homotopies entre courbes dans Ω . Puisque $\mathbb{D}$ est simplement connexe, car convexe, Ω doit nécessairement être *aussi* simplement connexe. Ainsi, aucun anneau $\mathbb{A}$ n'est équivalent à $\mathbb{D}$.

Il est absolument remarquable que ces deux conditions nécessaires aient été découvertes comme aussi suffisantes par Riemann, dans sa thèse soutenue en 1851 à l'âge de 21 ans.

Théorème 10.1. [de l'application conforme de Riemann] *Tout ouvert non vide $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$, i.e. avec $\mathbb{C} \setminus \Omega \neq \emptyset$, qui est connexe et simplement connexe, est biholomorphe au disque unité $\mathbb{D}$.*

De plus, pour tout $z_0 \in \Omega$ fixé, il existe un unique biholomorphisme :

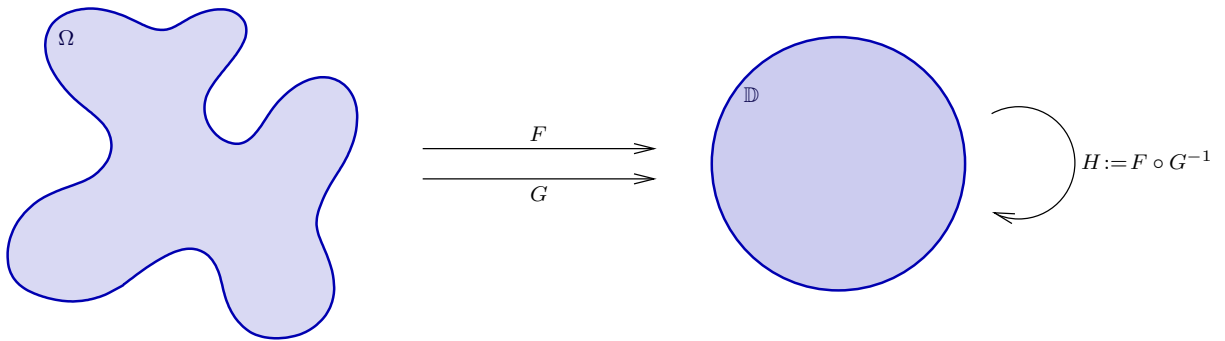
$$F: \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$$

satisfaisant les conditions de normalisation :

$$\begin{aligned} F(z_0) &= 0, \\ F'(z_0) &\in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad F'(z_0) > 0. \end{aligned}$$

Comme il n'y a qu'un seul « modèle », $\mathbb{D}$, et que les biholomorphismes peuvent être composés et inversés, il en découle un

Corollaire 10.2. *Deux ouverts connexes et simplement connexes quelconques $\Omega_1, \Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$ sont toujours biholomorphes.* $\square$



Preuve de l'unicité. Étant donné deux biholomorphismes normalisés :

$$F, G: \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D},$$

la composition $H := F \circ G^{-1}$ devient un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ fixant l'origine :

$$H(0) = F(G^{-1}(0)) = F(z_0) = 0.$$

Puisque $\text{Aut}_{\text{hol}}(\mathbb{D}) = \{z \mapsto e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}\}$, on sait par le Corollaire 9.5 que de tels biholomorphismes sont nécessairement de la forme $H(z) = e^{i\theta} z$.

Mais la formule de dérivation composée et l'hypothèse de normalisation :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= H'(0) = F'(G^{-1}(0)) \cdot (G^{-1})'(0) \\ &= F'(z_0) \frac{1}{G'(z_0)} \in \mathbb{R}_+^*, \end{aligned}$$

force $e^{i\theta} = 1$, d'où $H = \text{Id}$, c'est-à-dire $G = F$. □

La partie difficile, et profonde, de la démonstration du Théorème 10.1 de l'application conforme de Riemann concerne l'*existence*. À grands traits, en voici les idées. Introduisons l'ensemble :

$$\mathcal{R} := \{f: \Omega \longrightarrow \mathbb{D} \text{ holomorphe: } f(z_0) = 0 \text{ et } f \text{ injective}\}.$$

Nous avons déjà démontré dans le Théorème 6.3 fondamental que la seule injectivité de f assure qu'on a toujours un biholomorphisme de f sur son image :

$$f: \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega) \subset \mathbb{D}.$$

Puisqu'on cherche un *biholomorphisme* $\Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$, il est naturel de maximiser l'image $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$, c'est-à-dire de « remplir » $\mathbb{D}$.

Pour des raisons qui seront comprises ultérieurement, il s'avère que maximiser $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$ est possible en se contentant de maximiser seulement $|f'(z_0)|$, cela, en choisissant une certaine fonction appropriée $f_{\max} \in \mathcal{R}$. Évidemment, on peut toujours trouver une suite maximisante $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions $f_n \in \mathcal{R}$ satisfaisant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(z_0)| = \sup_{g \in \mathcal{R}} |g'(z_0)|,$$

mais on n'a alors aucune garantie que ces f_n convergeront vers une fonction holomorphe dans Ω , et qui plus est, une fonction *injective*, de manière à réellement trouver une fonction intéressante $f_{\max} \in \mathcal{R}$. C'est ici que gît la difficulté principale, et pour la surmonter, commençons à déployer des concepts nouveaux concernant la convergence de suites $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$.

11. Théorème de Montel pour les familles uniformément bornées et continues

Dans notre cas, les $f_n: \Omega \longrightarrow \mathbb{D}$ sont à valeurs dans $\mathbb{D}$, donc elles sont toutes bornées (par 1), mais énonçons plus généralement une

Définition 11.1. Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ de fonctions holomorphes est dite *uniformément bornée sur les compacts de Ω* si :

$$\begin{aligned} \forall K \subset \Omega \text{ compact} \quad \exists 0 \leq M_K < \infty \quad \text{telle que} \\ |f(z)| \leq M_K \quad (\forall z \in K, \forall f \in \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Une fonction holomorphe individuelle est bien entendu bornée sur un compact, mais on demande ici l'*uniformité* par rapport à la famille $\mathcal{F}$.

Le concept-clé apparaît maintenant.

Définition 11.2. Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ de fonctions holomorphes est dite *uniformément équicontinue sur les compacts de Ω* si :

$$\begin{aligned} \forall K \subset \Omega \text{ compact} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(K, \varepsilon) > 0 \quad \text{tel que} \\ (z, w \in K \text{ avec } |z - w| \leq \delta) \implies (|f(z) - f(w)| \leq \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Cette condition est très forte : non seulement on a continuité spatiale uniforme — ce qui, d'après Heine-Borel, est automatique pour des fonctions continues sur un compact —, mais encore, on a uniformité par rapport à la famille $\mathcal{F}$.

Exemple 11.3. Sur le segment fermé $[0, 1]$, soit la famille (suite) :

$$\{f_n(x) := x^n\}_{n=1}^{\infty},$$

uniformément bornée (par 1). Elle n'est pas uniformément équicontinue, car pour tout $x_0 < 1$ fixé arbitrairement proche de 1, on a :

$$|f_n(1) - f_n(x_0)| = 1 - x_0^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

quantité qui ne peut pas être rendue uniformément arbitrairement petite $\leq \varepsilon$, quelle que soit la proximité $1 - x_0 \leq \delta$.

Toutefois, cette famille $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ est uniformément équicontinue sur les compacts du segment *semi-ouvert* $[0, 1[$, car c'est une suite qui converge uniformément vers 0 sur tout segment $[0, x_0]$ avec $0 \leq x_0 < 1$.

Exemple 11.4. Un meilleur contre-exemple dans le monde réel est, sur le même segment semi-ouvert $[0, 1[$:

$$\{g_n(x) := \sin(2\pi nx)\}_{n=1}^{\infty}$$

Cette famille (suite) y est uniformément bornée (par 1), mais elle n'est uniformément équicontinue sur aucun segment compact $[a, b] \subset [0, 1[$ d'intérieur non vide, *i.e.* avec $0 \leq a < b < 1$, puisque (exercice), ses dérivées $2\pi n \cos(2\pi nx)$ y sont non bornées.

Dans le monde holomorphe, nous le savons, la magie domine. En voici une nouvelle illustration spectaculaire.

Théorème 11.5. [de Montel] Soit une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ de fonctions uniformément bornées sur les compacts de Ω . Alors :

- (1) $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue sur les compacts $K \subset \Omega$;
- (2) $\mathcal{F}$ est une famille normale.

Voici l'explicitation de ce dernier concept.

Définition 11.6. Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ est dite *normale* si pour toute suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in \mathcal{F}$, il existe au moins une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge uniformément sur les compacts de Ω :

$$f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g \in \mathcal{O}(\Omega).$$

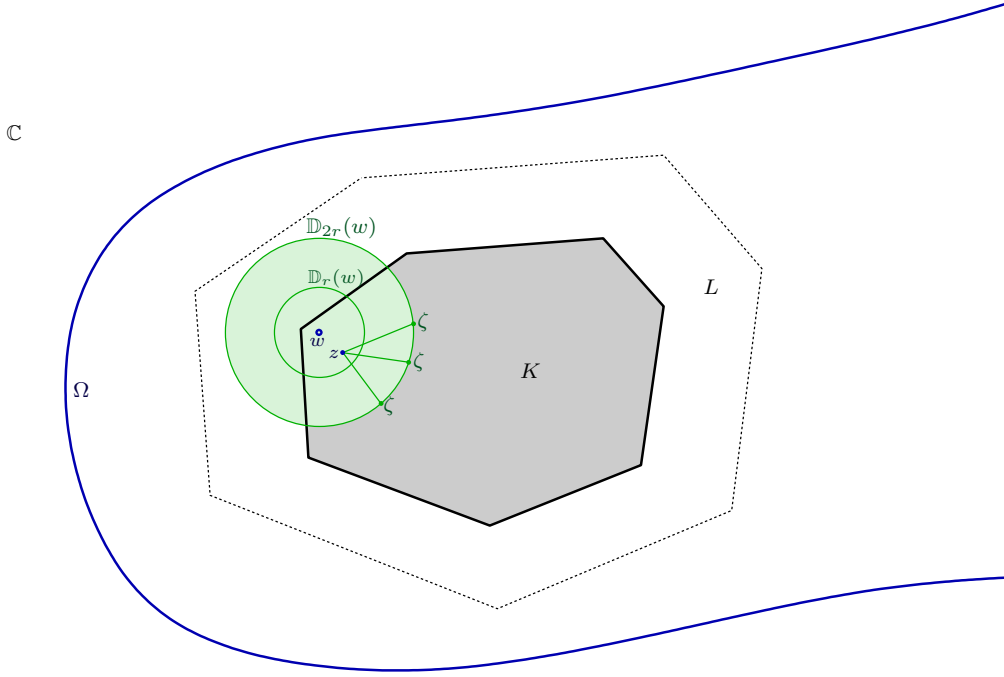
Rappelons qu'un théorème de Cauchy montre que la fonction-limite g est non seulement continue, mais aussi holomorphe. Il importe de faire remarquer qu'on ne demande pas que $g \in \mathcal{F}$ ici.

Plus haut, la suite de fonctions réelles $\{\sin(2\pi nx)\}_{n=1}^{\infty}$ sur $[0, 1[$ n'est *pas* normale (exercice). Mais la suite $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ l'est sur les compacts de $[0, 1[$, comme restriction à $[0, 1[\subset \mathbb{D}$ de la suite de fonctions holomorphes $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ définies sur $\mathbb{D}$ et donc à laquelle ce Théorème 11.5 s'applique !

12. Démonstration du Théorème de Montel

Démonstration du Théorème 11.5 (1). Commençons par établir le « miracle » (1) :

$$\mathcal{O}(\Omega) \supset \mathcal{F} \text{ uniformément bornée} \xRightarrow{\text{magie}} \mathcal{F} \text{ uniformément équicontinue} \\ \text{(sur les compacts)} \qquad \qquad \qquad \text{(sur les compacts).}$$



Soit donc $K \subset \Omega$ un compact quelconque. Choisissons $r > 0$ assez petit pour que $3r < \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Alors pour un point quelconque $w \in K$, on a $\overline{D}_{2r}(w) \subset \Omega$, et même mieux :

$$\overline{D}_{2r}(w) \subset \{\zeta \in \Omega : \text{dist}(\zeta, K) \leq 2r\} \\ =: L.$$

Puisque ce nouvel ensemble L est un compact de Ω , l'hypothèse que $\mathcal{F}$ est uniformément bornée fournit $M_L < \infty$ satisfaisant :

$$|f(\zeta)| \leq M_L \qquad (\forall \zeta \in L, \forall f \in \mathcal{F}).$$

Comme sur la figure, soit enfin un point quelconque $z \in D_r(w)$. La formule de Cauchy appliquée deux fois sur le cercle de rayon $2r$ centré en w :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{2r}(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \\ f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{2r}(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta,$$

donne, après soustraction :

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{2r}(w)} f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right] d\zeta,$$

et afin de faire voir la petitesse de $|f(z) - f(w)|$, il est avisé d'estimer celle de l'expression entre crochets :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right| &= \frac{|z - w|}{|\zeta - z| \cdot |\zeta - w|} \\ &= \frac{|z - w|}{|\zeta - z| \cdot 2r} \\ [z \in \mathbb{D}_r(w) \text{ et } \zeta \in C_{2r}(w) \implies |\zeta - z| > r] &\leq \frac{|z - w|}{r \cdot 2r}. \end{aligned}$$

En conclusion, nous obtenons bien une inégalité valable pour $z, w \in K$ avec $|z - w| \leq \delta \leq r$ qui fait voir comment choisir $\delta > 0$ pour obtenir l'équicontinuité uniforme :

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &\leq \frac{1}{2\pi} M_L \frac{|z - w|}{r \cdot 2r} 2\pi r \\ &= \text{constante} \cdot |z - w| \\ &\leq \text{constante} \cdot \delta \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Démonstration du Théorème 11.5 (2). Cette deuxième partie de l'énoncé ne doit rien à l'holomorphic :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ uniformément bornée} \\ \mathcal{F} \text{ uniformément équicontinue} \end{array} \right\} \implies \mathcal{F} \text{ normale},$$

elle est valable en remplaçant $\Omega \subset \mathbb{C}$ par un espace métrique quelconque $(E, d(\cdot, \cdot))$.

En effet, pour un compact arbitraire $K \subset E$, munissons l'espace :

$$\mathcal{C}(K) := \{f: K \longrightarrow K \text{ continue}\},$$

de la topologie de la convergence uniforme :

$$|f - g|_{\mathcal{C}(K)} := \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|.$$

Définition 12.1. [Analogue] Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ est dite :

- *uniformément bornée* s'il existe $0 \leq M < \infty$ telle que :

$$|f(x)| \leq M \quad (\forall x \in K, \forall f \in \mathcal{F});$$

- *uniformément équicontinue* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que}$$

$$(x, y \in K \text{ avec } d(x, y) \leq \delta) \implies (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F});$$

- *relativement compacte* si pour toute suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in \mathcal{F}$, il existe au moins une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge vers une certaine fonction continue $g \in \mathcal{C}(K)$ — mais n'appartenant pas forcément à $\mathcal{F}$ — :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - g|_{\mathcal{C}(K)}.$$

Ici, dans un cadre topologique métrique, le terme de « *famille normale* », généralement réservé au monde holomorphe, est remplacé par « *famille relativement compacte* », ce qui correspond bien à la conception que l'adhérence $\overline{\mathcal{F}}^{|\cdot|_{\mathcal{C}(K)}}$ de $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$, pour la topologie de la norme uniforme $|\cdot|_{\mathcal{C}(K)}$ est un compact contenu dans $\mathcal{C}(K)$.

Théorème 12.2. [Ascoli] *Pour toute sous-famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ de l'espace des fonctions réelles continues sur un compact $K \subset (E, d)$ d'un espace métrique, on a l'équivalence :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ uniformément bornée} \\ \mathcal{F} \text{ uniformément équicontinue} \end{array} \right\} \iff \mathcal{F} \text{ normale.}$$

Plutôt que de basculer dans le monde réel, revenons plutôt au monde imaginaire (holomorphe), et démontrons l'implication $\implies$, dont le lecteur avisé constatera qu'elle se généralise presque sans modification pour obtenir ce théorème d'Ascoli ; la réciproque, moins intéressante, est aussi laissée en exercice.

Soit donc une suite quelconque $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathcal{F}$ dans une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ uniformément bornée et uniformément équicontinue. L'objectif est de sélectionner une sous-suite qui est uniformément convergente sur les compacts de Ω . Deux idées interviennent.

La première idée consiste à faire converger une sous-suite $\{g_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ de $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ sur une collection *dénombrable dense* $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ de points $w_j \in \Omega$.

La seconde consiste à constater que l'équicontinuité uniforme est la bonne hypothèse suffisante pour « juguler la sauvagerie éventuelle » (non-convergence) des suites numériques $\{g_\nu(\zeta)\}_{\nu=1}^\infty$ en d'autres points $\zeta \in \Omega \setminus \{w_j\}_{j=1}^\infty$.

Premièrement, il est clair par densité et dénombrabilité de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ que le sous-ensemble :

$$\Omega \cap (\mathbb{Q} + \sqrt{-1}\mathbb{Q}) =: \{w_j\}_{j=1}^\infty$$

est dense et dénombrable, donc représentable comme une certaine *suite*.

Au point w_1 , les valeurs $\{f_n(w_1)\}_{n=1}^\infty$ restent bornées. Extrayons alors une sous-suite de $\{f_n\}$, notée :

$$\{f_{n_1}^1\}_{n_1=1}^\infty,$$

convergeant en w_1 :

$$f_{n_1}^1(w_1) \xrightarrow{n_1 \rightarrow \infty} \varphi_1 \in \mathbb{C}.$$

Dire que c'est une sous-suite revient à dire qu'il y a une application $n_1 \mapsto n(n_1)$ strictement croissante telle que :

$$f_{n_1}^1 := f_{n(n_1)} \quad \text{avec} \quad n(n_1) \geq n_1 \quad (n_1 \geq 1).$$

Au point w_2 , les valeurs $\{f_{n_1}(w_2)\}_{n_1=1}^\infty$ restent aussi bornées, donc ré-extrayons :

$$f_{n_2}^2 := f_{n_1(n_2)}^1 = f_{n(n_1(n_2))} \quad \text{avec} \quad n_1(n_2) \geq n_2 \quad (n_2 \geq 1),$$

afin que :

$$f_{n_2}^2(w_2) \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} \varphi_2 \in \mathbb{C}.$$

Mais alors, au point w_1 , la convergence est conservée grâce à $n_1(n_2) \geq n_2$:

$$f_{n_2}^2(w_1) = f_{n_1(n_2)}^1(w_1) \xrightarrow{n_2 \rightarrow \infty} \varphi_1.$$

Diagrammatisons cela :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 & f_9 & f_{10} & f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_{17} \\
 & \boxed{f_1^1} & & f_2^1 & & f_3^1 & f_4^1 & f_5^1 & f_6^1 & & f_7^1 & & f_8^1 & f_9^1 & f_{10}^1 & & f_{11}^1 \\
 & & f_1^2 & & \boxed{f_2^2} & f_3^2 & & f_4^2 & & f_5^2 & & f_6^2 & f_7^2 & & & & f_8^2 \\
 & & & f_1^3 & & & f_2^3 & & \boxed{f_3^3} & & f_4^3 & f_5^3 & & & & & f_6^3 \\
 & & & & & & f_1^4 & & & f_2^4 & & & f_3^4 & & & & \boxed{f_4^4}
 \end{array}$$

Continuons cela au point w_3 :

$$f_{n_3}^3 := f_{n_2(n_3)}^2 = f_{n_1(n_2(n_3))}^1 = f_{n(n_1(n_2(n_3)))} \quad (n_3 \geq 1),$$

pour avoir :

$$f_{n_3}^3(w_3) \xrightarrow[n_3 \rightarrow \infty]{} \varphi_3,$$

tout en conservant aux deux points précédents w_2, w_1 :

$$\begin{aligned}
 f_{n_3}^3(w_2) &= f_{n_2(n_3)}^2(w_2) \xrightarrow[n_3 \rightarrow \infty]{} \varphi_2, \\
 f_{n_3}^3(w_1) &= f_{n_1(n_2(n_3))}^1(w_1) \xrightarrow[n_3 \rightarrow \infty]{} \varphi_1,
 \end{aligned}$$

parce que :

$$\begin{aligned}
 n_2(n_3) &\geq n_3, \\
 n_1(n_2(n_3)) &\geq n_2(n_3) \geq n_3.
 \end{aligned}$$

Généralement, après avoir extrait $j - 1$ fois :

$$f_{n_1}^1(w_1) \xrightarrow[n_1 \rightarrow \infty]{} \varphi_1, \dots, f_{n_{j-1}}^{j-1}(w_{j-1}) \xrightarrow[n_{j-1} \rightarrow \infty]{} \varphi_{j-1},$$

extrayons une j -ème fois :

$$f_{n_j}^j := f_{n_{j-1}(n_j)}^{j-1} = f_{n_{j-2}(n_{j-1}(n_j))}^{j-2} = \dots = f_{n_1(\dots(n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)))\dots)}^1,$$

afin que :

$$f_{n_j}^j(w_j) \xrightarrow[n_j \rightarrow \infty]{} \varphi_j \in \mathbb{C},$$

avec par construction des inégalités mémorisant les extractions successives :

$$\begin{aligned}
 n_{j-1}(n_j) &\geq n_j, \\
 n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)) &\geq n_{j-1}(n_j) \geq n_j, \\
 &\dots \\
 n_1(\dots(n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)))\dots) &\geq \dots \geq n_{j-1}(n_j) \geq n_j,
 \end{aligned}$$

et qui permettent de constater qu'aux points précédents $w_{j-1}, w_{j-2}, \dots, w_1$, les convergences sont conservées :

$$\begin{aligned}
 f_{n_j}^j(w_j) &= f_{n_{j-1}(n_j)}^{j-1}(w_{j-1}) \xrightarrow[n_j \rightarrow \infty]{} \varphi_{j-1} && (\text{car } n_{j-1}(n_j) \geq n_j), \\
 f_{n_j}^j(w_{j-2}) &= f_{n_{j-2}(n_{j-1}(n_j))}^{j-2}(w_{j-2}) \xrightarrow[n_j \rightarrow \infty]{} \varphi_{j-2} && (\text{car } n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)) \geq n_j), \\
 &\dots \\
 f_{n_j}^j(w_1) &= f_{n_1(\dots(n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)))\dots)}^1(w_1) \xrightarrow[n_j \rightarrow \infty]{} \varphi_1 && (\text{car } n_1(\dots(n_{j-2}(n_{j-1}(n_j)))\dots) \geq n_j).
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous sommes parvenus à garantir une convergence sur un nombre fini $j \geq 1$ quelconque de points $w_1, \dots, w_j \in \Omega$.

Contrairement à une intuition d'impossibilité éventuelle, il est en fait possible de construire une sous-suite qui converge en *tous* les points infinis dénombrables $\{w_j\}_{j=1}^\infty$. Voici le diagramme qui donne l'idée :

$$\begin{array}{ccccc}
 \boxed{f_1^1} & f_2^1 & f_3^1 & f_4^1 & f_5^1 \\
 f_1^2 & \boxed{f_2^2} & f_3^2 & f_4^2 & f_5^2 \\
 f_1^3 & f_2^3 & \boxed{f_3^3} & f_4^3 & f_5^3 \\
 f_1^4 & f_2^4 & f_3^4 & \boxed{f_4^4} & f_5^4 \\
 f_1^5 & f_2^5 & f_3^5 & f_4^5 & \boxed{f_5^5}
 \end{array}$$

En effet, l'astuce est d'effectuer ce qu'on appelle une *extraction diagonale*, en introduisant la sous-suite :

$$g_\nu := f_\nu^\nu \quad (\nu \geq 1),$$

c'est-à-dire que g_ν est le ν -ème terme de la sous-suite extraite.

Assertion 12.3. *En tout point $w_j \in \Omega \cap (\mathbb{Q} + \sqrt{-1}\mathbb{Q})$, on a convergence :*

$$g_\nu(w_j) \xrightarrow[n_j \rightarrow \infty]{} \varphi_j \quad (\forall j \geq 1).$$

Preuve. En effet, dès que $\nu \geq j$, toutes les fonctions g_ν appartiennent à la suite $\{f_{n_j}^j\}_{n_j=1}^\infty$, dont on vient de voir qu'elle converge en les points $w_1, \dots, w_j$. $\square$

Comme annoncé, la deuxième idée exploite l'hypothèse d'équicontinuité uniforme des éléments de $\mathcal{F}$, donc des éléments de la suite $\{g_\nu = f_\nu^\nu\}_{\nu=1}^\infty$.

Proposition 12.4. *Sur un compact quelconque non vide $K \subset \Omega$, la suite extraite diagonale $\{g_\nu = f_\nu^\nu\}$ converge uniformément.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. En abrégant :

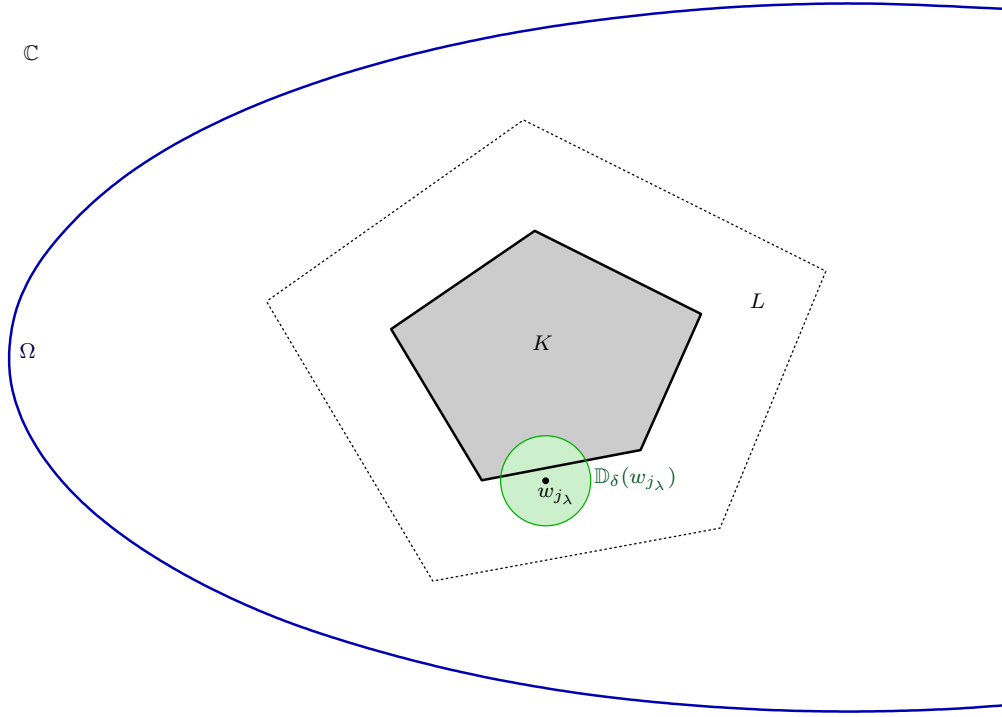
$$c := \min \left\{ 1, \frac{1}{2} \text{dist} \left(K, \mathbb{C} \setminus \Omega \right) \right\},$$

qui satisfait $0 < c < \infty$, introduisons le sous-ensemble compact de Ω qui «élargit» K :

$$L := \{ \zeta \in \Omega : \text{dist}(\zeta, K) \leq c \},$$

ainsi que l'ouvert naturel que ce plus gros compact contient :

$$\begin{aligned}
 U &:= \{ \zeta \in \Omega : \text{dist}(\zeta, K) < c \} \\
 &\subset L.
 \end{aligned}$$



Comme $\mathcal{F}|_L$ est uniformément équicontinue, il en va de même pour $\{g_\nu|_L\}_{\nu=1}^\infty$, donc il existe $\delta = \delta(L, \varepsilon) > 0$ assez petit pour que :

$$(z, w \in L \text{ avec } |z - w| \leq \delta) \implies (|g_\nu(z) - g_\nu(w)| \leq \varepsilon \quad \forall \nu \geq 1).$$

Si nécessaire, nous pouvons diminuer δ de façon à ce que :

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Du recouvrement ouvert trivial :

$$K \subset \Omega \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{D}_\delta(w_j),$$

Borel et Lebesgue extraient pour nous un recouvrement fini :

$$K \subset \mathbb{D}_\delta(w_{j_1}) \cup \dots \cup \mathbb{D}_\delta(w_{j_\kappa}),$$

avec certains indices $1 \leq j_1 < \dots < j_\kappa$. Quitte à en supprimer quelques uns qui sont inutiles, nous pouvons supposer que :

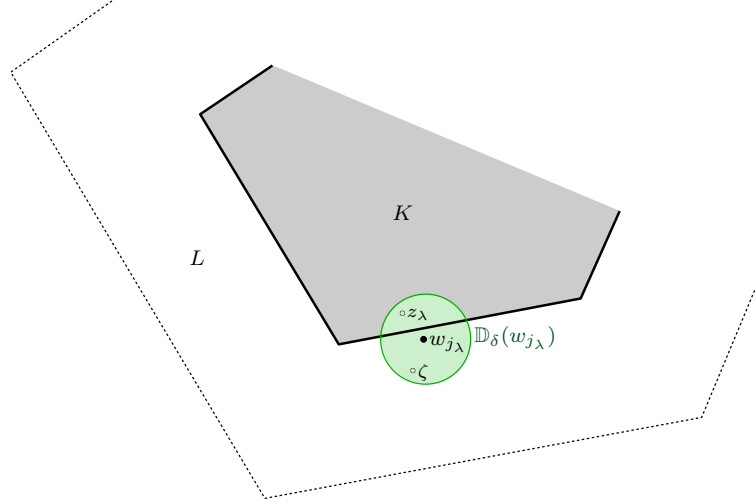
$$\emptyset \neq K \cap \mathbb{D}_\delta(w_{j_\lambda}) \quad (\forall 1 \leq \lambda \leq \kappa).$$

Assertion 12.5. *Alors tous ces disques sont contenus dans le compact élargi :*

$$\mathbb{D}_\delta(w_{j_\lambda}) \subset L \quad (\forall 1 \leq \lambda \leq \kappa).$$

En particulier, leurs centres :

$$w_{j_1}, \dots, w_{j_\kappa} \in L.$$



Preuve. En effet, pour $1 \leq \lambda \leq \kappa$ fixé, il existe au moins un point $z_\lambda \in K \cap \mathbb{D}_\delta(w_{j_\lambda})$, mais alors pour tout autre point arbitraire $\zeta \in \mathbb{D}_\delta(w_{j_\lambda})$, il vient :

$$\begin{aligned} |\zeta - z_\lambda| &\leq |\zeta - w_{j_\lambda}| + |w_{j_\lambda} - z_\lambda| \\ &< \delta + \delta \\ &< c, \end{aligned}$$

ce qui signifie bien que $z \in U$. □

Maintenant, comme on a convergence ponctuelle en la collection finie $w_{j_1}, \dots, w_{j_\kappa}$ des centres de ces disques recouvrant K , toujours avec le même $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$\nu, \nu' \geq N \implies \left(|g_\nu(w_{j_\lambda}) - g_{\nu'}(w_{j_\lambda})| \leq \varepsilon \quad (\forall 1 \leq \lambda \leq \kappa) \right).$$

Alors en un autre point quelconque $z \in K \subset L$, d'où $z \in \mathbb{D}_\delta(w_{j_\lambda})$ pour au moins un indice $1 \leq \lambda(z) \leq \kappa$, l'équicontinuité uniforme sur le compact auquel *appartiennent* les deux points z et $w_{j_{\lambda(z)}}$ permet de majorer pour tous $\nu, \nu' \geq N$ grâce à une inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |g_\nu(z) - g_{\nu'}(z)| &\leq |g_\nu(z) - g_\nu(w_{j_{\lambda(z)}})| + |g_\nu(w_{j_{\lambda(z)}}) - g_{\nu'}(w_{j_{\lambda(z)}})| + |g_{\nu'}(w_{j_{\lambda(z)}}) - g_{\nu'}(z)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ici, la majoration des termes délicats 1 et 3 utilise crucialement en effet l'équicontinuité uniforme, laquelle vient de « forcer » la convergence uniforme en tous les points z assez proches d'un point $w_{j_{\lambda(z)}}$ en lequel la convergence ponctuelle a été arrangée à l'avance. □

En conclusion, $\{g_\nu = f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ converge bien uniformément sur tous les compacts $K \subset \Omega$ vers une certaine fonction-limite holomorphe dans Ω . □

13. Préservation de l'injectivité à la limite

Un dernier ingrédient essentiel est nécessaire avant d'entamer la démonstration proprement dite du Théorème 10.1 de l'application conforme de Riemann. À nouveau, il s'agit d'un phénomène typiquement holomorphe, n'ayant aucun analogue vrai dans le monde réel.

Proposition 13.1. Dans un ouvert non vide connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une suite $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ toutes injectives. Si $\{f_n\}$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers une $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, alors :

$$f \text{ est } \begin{cases} \text{ou bien injective,} \\ \text{ou bien constante.} \end{cases}$$

Démonstration. Supposons f non injective, à savoir, il existe $z_1 \neq z_2 \in \Omega$ distincts avec $f(z_1) = f(z_2)$. Le but est de faire voir que f est constante.

À cet effet, introduisons les fonctions :

$$g_n(z) := f_n(z) - f_n(z_1) \quad (n \geq 1),$$

qui ont pour seul zéro $z = z_1$. Si donc $r > 0$ est assez petit pour que $r < \frac{1}{2}|z_2 - z_1|$, d'où $g_n|_{\overline{\mathbb{D}}_r(z_2)} \neq 0$, une formule connue comptant le nombre de zéros donne :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'_n(\zeta)}{g_n(\zeta)} d\zeta \quad (n \geq 1).$$

Par hypothèse :

$$\begin{aligned} g_n(z) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(z) - f(z_1) \\ &=: g(z). \end{aligned}$$

Observons que $g(z_2) = 0$.

Assertion 13.2. On a $g \equiv 0$.

Preuve. Sinon, si $g \not\equiv 0$, comme Ω est connexe, l'autre zéro z_2 de g doit être isolé, donc quitte à réduire $r > 0$, on a non-annulation :

$$g|_{\overline{\mathbb{D}}_r(z_2) \setminus \{z_2\}} \neq 0,$$

puis la même formule exprime l'ordre, fini, d'annulation de g en z_2 :

$$\nu_g(z_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta.$$

Sur le cercle $C_r(z_2)$, la non-annulation $g|_{C_r(z_2)} \neq 0$ et un théorème de Cauchy offrent les deux convergences uniformes :

$$\frac{1}{g_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{g} \quad \text{et} \quad g'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g' \quad (\text{sur } C_r(z_2)).$$

Mais alors ces deux convergences uniformes permettent d'intervertir limite et intégration pour aboutir à une contradiction :

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'_n(\zeta)}{g_n(\zeta)} d\zeta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad \square$$

En définitive, $0 \equiv g(z) = f(z) - f(z_1)$ montre bien que f était constante. $\square$

14. Démonstration du théorème de Riemann

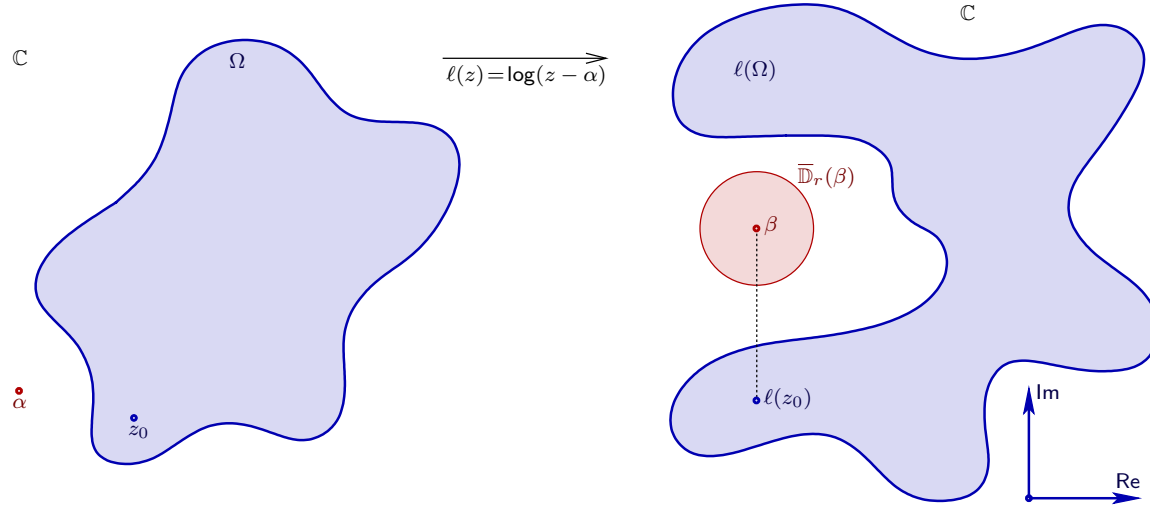
L'argumentation se déroule en trois étapes, la seconde étant la plus essentielle.

Étape 1. D'une manière qui pourrait paraître surprenante, le fait que l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ soit *distinct* de $\mathbb{C}$ est une hypothèse impliquant que Ω n'est en fait pas « gros », comme le dévoile le

Lemme 14.1. *Tout ouvert connexe et simplement connexe non vide $\emptyset \neq \Omega \subsetneq \mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe :*

$$f: \Omega \xrightarrow{\sim} \omega$$

à un ouvert (non vide) $\omega \subset \mathbb{D}$ contenu dans le disque unité avec $0 \in \omega$.



Démonstration. Soit donc un point $\alpha \in \Omega \setminus \mathbb{C}$. Comme Ω est simplement connexe et comme $z - \alpha \neq 0$ dans Ω , il existe une fonction logarithme :

$$\ell(z) := \log(z - \alpha),$$

holomorphe pour $z \in \Omega$, ce qui revient à écrire :

$$e^{\ell(z)} = z - \alpha \quad (\forall z \in \Omega).$$

Or ceci implique que ℓ est injective, car si $\ell(z_1) = \ell(z_2)$, il vient $z_1 - \alpha = z_2 - \alpha$.

Fixons un point $z_0 \in \Omega$, et translatons son image $\ell(z_0)$ verticalement d'une hauteur 2π :

$$\beta := \ell(z_0) + 2i\pi.$$

Assertion 14.2. *Il existe $r > 0$ assez petit pour que l'image complète de Ω par $\ell(z)$ évite le disque fermé de rayon r centré en β :*

$$\log(\Omega - \alpha) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_r(\beta).$$

Preuve. Sinon, il existerait une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n \in \Omega$ tels que :

$$\ell(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell(z_0) + 2i\pi$$

$$\Downarrow$$

$$z_n - \alpha = e^{\ell(z_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\ell(z_0) + 2i\pi} = z_0 - \alpha,$$

ce qui impliquerait $z_n \rightarrow z_0$, donc $\ell(z_n) \rightarrow \ell(z_0)$ par continuité — contradiction avec le point de départ ! $\square$

Ainsi :

$$|\ell(z) - \beta| > r \quad (\forall z \in \Omega).$$

Effectuons une inversion (renormalisée) centrée au point β , afin d'échanger l'intérieur du cercle $C_r(\beta)$ avec son extérieur :

$$g(w) := \frac{r}{w - \beta},$$

ce qui donne par composition :

$$g(\ell(z)) = \frac{r}{\log(z - \alpha) - \beta}.$$

Comme ℓ et g sont injectives, leur composition $g \circ \ell$ l'est aussi. Le Théorème 6.2 fondamental garantit alors que :

$$g \circ \ell: \Omega \xrightarrow{\sim} g \circ \ell(\Omega),$$

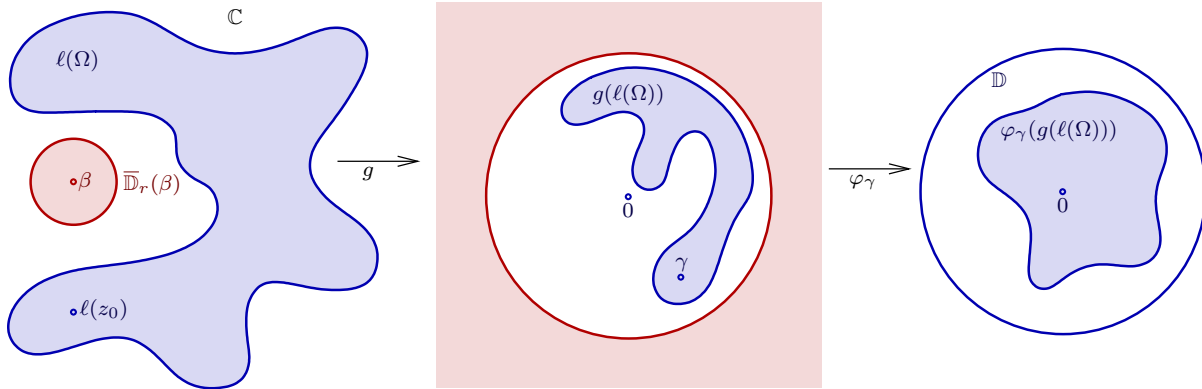
est un biholomorphisme. En particulier, $g \circ \ell(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Assertion 14.3. On a $g \circ \ell(\Omega) \subset \mathbb{D}$.

Preuve. En effet :

$$\begin{aligned} |g \circ \ell(z)| &\leq \frac{r}{|\ell(z) - \beta|} \\ &< \frac{r}{r} = 1. \end{aligned}$$

□



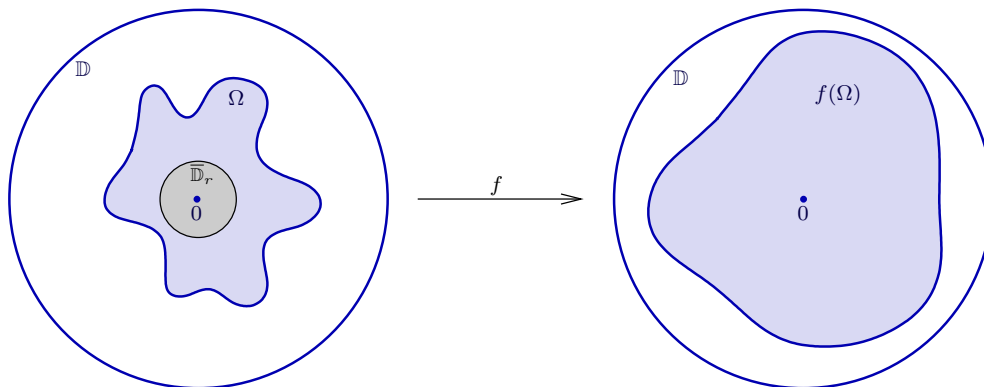
Toutefois, cet ouvert $g \circ \ell(\Omega) \subset \mathbb{D}$ ne contient pas forcément l'origine. Qu'à cela ne tienne, puisqu'il contient le point $g(\ell(z_0)) =: \gamma$, nous n'avons qu'à le composer avec l'automorphisme $\varphi_\gamma(w) = \frac{\gamma - w}{1 - \bar{\gamma}w}$ du disque unité qui envoie γ sur $0 \in \mathbb{D}$, pour obtenir en conclusion :

$$f := \varphi_\gamma \circ g \circ \ell \quad \text{avec} \quad \omega := \varphi_\gamma(g(\ell(\Omega))) \ni 0.$$

□

Étape 2. Grâce à ce qui précède, on peut dorénavant supposer que :

$$0 \in \Omega \subset \mathbb{D}.$$



Comme promis, introduisons alors l'espace fonctionnel :

$$\mathcal{R} := \{f: \Omega \longrightarrow \mathbb{D} \text{ holomorphe: } f(0) = 0 \text{ et } f \text{ injective}\},$$

qui est non vide, puisqu'il contient l'identité $z \mapsto z$. Souvenons-nous qu'alors toutes ces $f: \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ sont des biholomorphismes.

Cette famille $\mathcal{R}$ est uniformément bornée — sans avoir besoin de se cantonner à des compacts ! —, car $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \Omega$. Le Théorème 11.5 de Montel affirme alors que $\mathcal{R}$ est uniformément équicontinue et normale.

Ensuite, soit $r > 0$ assez petit pour que $\overline{\mathbb{D}}_r(0) \subset \Omega$. De la formule de Cauchy pour $g \in \mathcal{R}$ quelconque :

$$g'(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{g(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta,$$

découle une majoration :

$$\begin{aligned} |g'(0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|\zeta|=r} |g| \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r \\ &\leq 1 \cdot \frac{1}{r} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

bornant uniformément les modules des dérivées en 0, ce qui garantit la finitude de :

$$s := \sup_{g \in \mathcal{R}} |g'(0)| < \infty.$$

Avec l'identité $g(z) = z \in \mathcal{R}$, on voit que :

$$1 \leq s.$$

Proposition 14.4. [Principale] *Il existe une fonction $f \in \mathcal{R}$ — c'est-à-dire holomorphe injective $\Omega \longrightarrow \mathbb{D}$ avec $f(0) = 0$ — qui réalise ce supremum :*

$$s = |f'(0)| \quad (< \infty).$$

Démonstration. Prenons une suite $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions $f_n \in \mathcal{R}$ maximisante :

$$|f'_n(0)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s.$$

Tout notre programme se réalise précisément maintenant, parce que le Théorème 11.5 de Montel nous offre une sous-suite, que nous noterons encore $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ pour simplifier, qui converge, uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$, vers une certaine fonction holomorphe :

$$f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}).$$

Un théorème de Cauchy donne la convergence des dérivées $f'_n \rightarrow f'$, donc $|f'(0)| = s$.

Rappelons que dans la Définition 11.6 du concept de *famille normale* $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}(\Omega)$, nous n'avons pas demandé que les fonctions-limites appartiennent encore à la famille $\mathcal{R}$, et donc ici, il reste à argumenter que :

$$f \stackrel{?}{\in} \mathcal{R}.$$

C'est facile ! Premièrement, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ offre $f(0) = 0$ sans effort.

Deuxièmement, puisque les f_n sont toutes injectives, et puisque f est non constante — car $|f'(0)| = s \geq 1$ —, la Proposition 13.1 offre l'injectivité de f . Ainsi, les deux conditions pour que $f \in \mathcal{R}$ sont satisfaites. $\square$

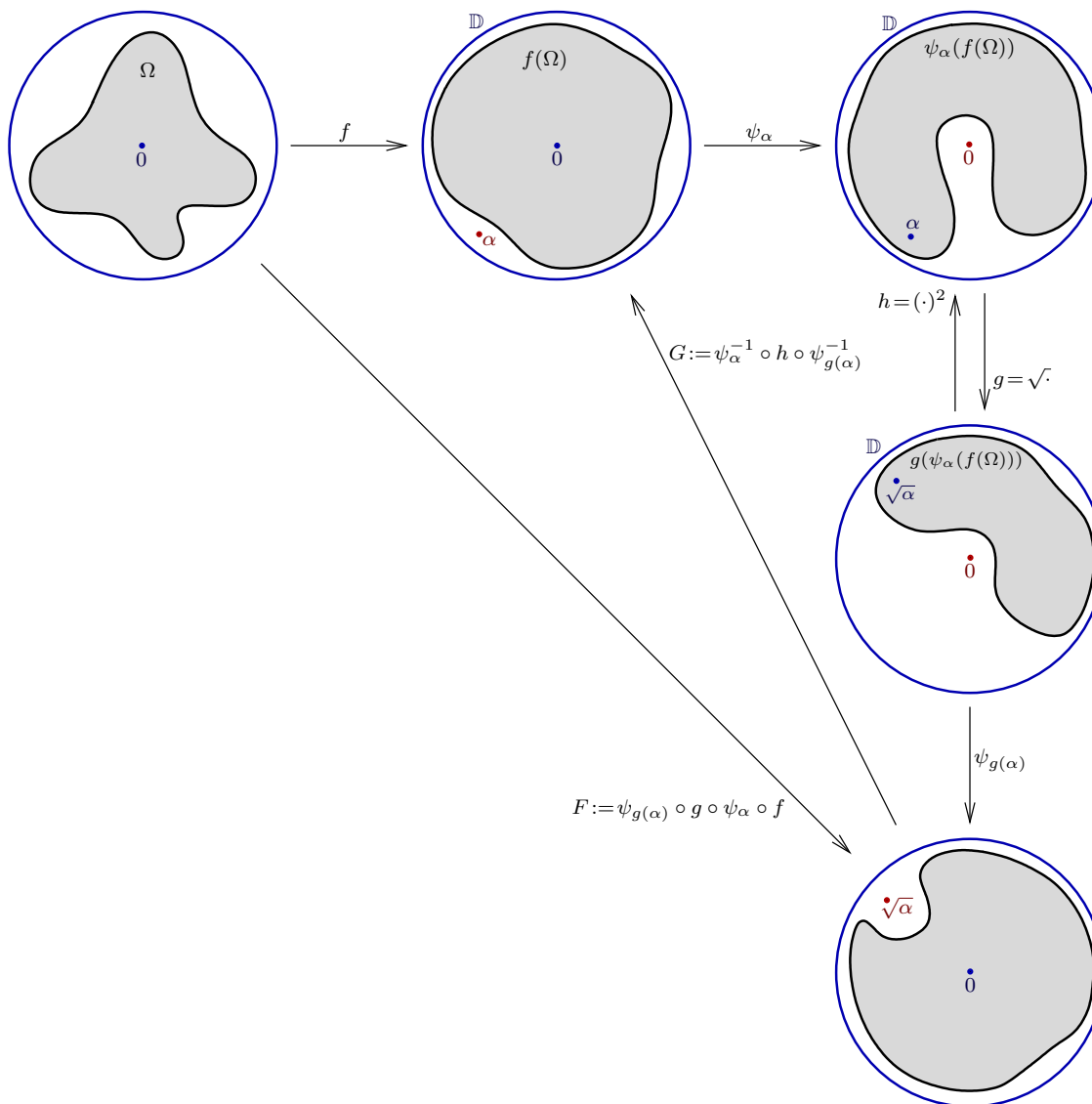
Étape 3. Dans cette dernière étape, nous établissons que cette fonction $f \in \mathcal{R}$ réalisant le supremum de la dérivée en 0 constitue un biholomorphisme $f: \Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$. Comme on sait que $f: \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ en est déjà un par injectivité, il ne reste plus qu'à traiter la *surjectivité*.

Affirmation 14.5. *La fonction $f \in \mathcal{R}$ satisfaisant $|f'(0)| = \sup_{g \in \mathcal{R}} |g'(0)|$ est surjective $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence d'un :

$$\alpha \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega).$$

Pour aboutir à une contradiction, nous allons construire une autre fonction $F \in \mathcal{R}$ de dérivée strictement supérieure $|F'(0)| > |f'(0)|$ à l'origine.



Considérons l'automorphisme ψ_α de $\mathbb{D}$ qui échange 0 et α :

$$\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

Comme Ω est simplement connexe, l'ouvert $\psi_\alpha(\Omega)$ l'est aussi, et il ne contient pas $\psi_\alpha(\alpha) = 0$. Nous pouvons donc définir une fonction racine carrée :

$$g(w) := \sqrt{w} := e^{\frac{1}{2} \log w},$$

holomorphe dans $\psi_\alpha \circ g(\Omega)$, et en composant avec g , on divise essentiellement par 2 l'« écartement angulaire » de $\psi_\alpha \circ f(\Omega)$ dans $\mathbb{D}$, comme tente de l'illustrer la figure.

Enfin, pour ramener le point $g \circ \psi_\alpha \circ f(0) = g \circ \psi_\alpha(0) = g(\alpha)$ à être l'origine, introduisons la composition :

$$F := \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f.$$

Assertion 14.6. On a $F \in \mathcal{R}$.

Preuve. On vient de faire $F(0) = 0$. Ensuite, F envoie Ω dans $\mathbb{D}$, puisque $\psi_\alpha, g, \psi_{g(\alpha)}$ envoient $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Enfin, f est injective par hypothèse, ψ_α est un automorphisme, $g(w) = \sqrt{w}$ est injective, $\psi_{g(\alpha)}$ est un automorphisme, donc la composition $F = \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f$ est aussi injective. $\square$

En notant $h(w) := w^2$ la fonction réciproque, il vient :

$$f = \underbrace{\psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1}}_{=: G} \circ F.$$

Cette nouvelle fonction composée G envoie $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ et fixe l'origine :

$$G(0) = \psi_\alpha^{-1}(h(\psi_{g(\alpha)}^{-1}(0))) = \psi_\alpha^{-1}(h(g(\alpha))) = \psi_\alpha^{-1}((\sqrt{\alpha})^2) = \psi_\alpha(\alpha) = 0,$$

mais $G: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ n'est pas injective, car $h(w) = w^2$ ne l'est clairement pas.

Par conséquent, la partie (3) du Lemme 8.1 de Schwarz implique :

$$|G'(0)| < 1 \quad (\text{strictement}).$$

Une dérivation à l'origine de $f = G \circ F$ donne :

$$f'(0) = G'(F(0)) F'(0) = G'(0) F'(0),$$

et par conséquent :

$$|f'(0)| < |F'(0)|,$$

en contradiction *déflagrationnelle et libératrice*¹ avec l'hypothèse de maximalité de $|f'(0)|$ dans la famille $\mathcal{R}$. $\square$

Pour terminer complètement l'argumentation du Théorème 10.1, il ne reste plus qu'à multiplier f par un nombre complexe approprié de module 1 pour avoir $f'(0) \in \mathbb{R}$ avec $f'(0) > 1$. $\square$

15. Exercices

Exercice 1. EE

1. Chapitre de 25 pages tapé intégralement (hors figures) en L^AT_EX-non-stop le Dimanche 7 Mai 2018, de 08h15 à 18h05.

Examens corrigés

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Examen 2

Exercice 1. Soit $\mathbb{D} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ le disque unité dans $\mathbb{C}$, soit $w \in \mathbb{D}$ fixé, et soit :

$$\varphi_w(z) := \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}.$$

(a) Montrer que $\varphi_w \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{D}})$.

(b) Montrer que $|\varphi_w(z)| = 1$ pour tout $|z| = 1$, puis que $|\varphi_w(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, et enfin que $|\varphi_w(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(c) Soit une suite infinie $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points *non nuls* $z_n \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ satisfaisant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

On pose :

$$F_n(z) := \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Pour $z \in \mathbb{D}$ fixé, montrer que :

$$|F_n(z) - 1| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} (1 - |z_n|).$$

Indication: Utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité $\frac{1}{|1 - \bar{z}_n z|} \leq \frac{1}{1 - |z|}$.

(d) Montrer que le produit infini $F(z) := \prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ converge normalement sur les compacts de $\mathbb{D}$. **Indication:** On rappelle qu'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ est dit *normalement convergent* sur un compact $K \subset \mathbb{D}$ si la série $\sum_{n=1}^{\infty} (F_n(z) - 1)$ est normalement convergente sur K .

(e) Montrer que $|F(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(f) Quel problème la fonction $F(z)$ résout-elle ?

(g) Maintenant, soit une fonction holomorphe $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ non constante, avec $f(0) = 0$. Pour $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ non nul, on note :

$$f^{-1}(w) := \{z \in \mathbb{D} : f(z) = w\}.$$

On suppose $\text{Card } f^{-1}(w) = \infty$.

Justifier que l'on peut écrire :

$$f^{-1}(w) = \{z_n\}_{n=1}^{\infty},$$

avec $z_n \in \mathbb{D}$ et :

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n|.$$

(h) On pose :

$$g(z) := \varphi_w(f(z)),$$

en rappelant que $\varphi_w(z) := \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$. Montrer que $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

(i) Pour $N \geq 1$ entier, on pose :

$$B_N(z) := \prod_{n=1}^N \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}.$$

Montrer qu'il existe $h_N \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ telle que :

$$g(z) = B_N(z) h_N(z) \quad (\forall z \in \mathbb{D}).$$

(j) Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ (censé être arbitrairement proche de 0), il existe un rayon $0 < r_\varepsilon < 1$ (censé être proche de 1) tel que :

$$|B_N(z)| \geq 1 - \varepsilon \quad (\forall |z| = r_\varepsilon).$$

(k) Montrer que $|h_N(0)| \leq 1$.

(l) On introduit maintenant la *fonction de comptage de Nevanlinna* :

$$\begin{aligned} N_f(w) &:= \sum_{z \in f^{-1}(w)} \log \frac{1}{|z|} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|}. \end{aligned}$$

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|} \leq \log \frac{1}{|w|}.$$

(m) Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

(n) Soit maintenant $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, bornée $|F(z)| \leq M < \infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et non identiquement nulle $F \not\equiv 0$. Soient $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ses zéros, supposés en nombre infini. On suppose temporairement que $M = 1$ et que $F(0) \neq 0$.

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$. **Indication:** Introduire :

$$f(z) := \frac{F(z) - F(0)}{1 - \overline{F(0)} F(z)}.$$

(o) Montrer que cela se généralise sans supposer $M = 1$ et $F(0) \neq 0$.

(p) Interpréter le résultat obtenu en l'énonçant sous la forme d'un théorème synthétique.

Exercice 2. (a) Montrer que la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ de Riemann satisfait, pour $s \in \mathbb{R}$ avec $s > 1$:

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}.$$

Indication: Penser à la formule de produit infini d'Euler, vue en cours.

(b) Justifier que $\zeta(s) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} s > 1$, puis justifier l'existence et l'holomorphic d'une fonction $s \mapsto \log \zeta(s)$ définie dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$ et prenant des valeurs réelles sur $]1, \infty[$.

(c) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} s > 1$, on a encore :

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}.$$

Indication: Penser au principe d'unicité pour les fonctions holomorphes qui coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation.

(d) Toujours pour $\operatorname{Re} s > 1$, montrer que :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

où Λ est la *fonction de von Mangoldt* :

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{lorsque } n = p^\alpha \text{ avec } p \in \mathcal{P} \text{ et } \alpha \geq 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(e) Pour $c > 1$ fixé, en notant comme Riemann $s = \sigma + it$, on considère la droite réelle verticale $\{c + it : -\infty < t < \infty\}$ orientée du bas vers le haut. Soit l'intégrale dépendant du paramètre $a > 0$:

$$I(a) := \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)} ds.$$

Montrer qu'elle converge. **Indication:** $|a^s| = a^\sigma$.

(f) On suppose dorénavant, jusqu'à la Question (j) ci-dessous, que $a \geq 1$. Soit la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(s) := \frac{a^s}{s(s+1)}.$$

Calculer $\operatorname{Res}_f(0)$, puis $\operatorname{Res}_f(-1)$.

(g) Avec un rayon $R > 1 + c$ (qui tendra vers l'infini), on considère le contour orienté Γ_R^- consistant en le segment vertical $[c - iR, c + iR]$ parcouru du bas vers le haut, suivi du demi-cercle C_R^- centré en c de rayon R situé à gauche de l'axe vertical $\{\operatorname{Re} s = c\}$. Dessiner Γ_R^- avec tous les détails possibles.

(h) Trouver la valeur de :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R^-} f(s) ds = ?.$$

(i) Montrer que :

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} f(s) ds.$$

Indication: Utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité valable pour tous rayons $R \geq R_c \gg 1$ assez grands :

$$|s(s+1)| \geq \frac{1}{2} R^2.$$

(j) Toujours avec $c > 1$ fixé, montrer que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)} ds = \begin{cases} 1 - \frac{1}{a} & \text{quand } 1 \leq a, \\ 0 & \text{quand } 0 < a \leq 1. \end{cases}$$

Indication: Changer de demi-cercle, et faire d'abord une figure (notée !).

(k) On introduit maintenant la *fonction psi* de Tchebychev :

$$\psi(x) := \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n),$$

puis :

$$\psi_1(x) := \int_1^x \psi(u) du.$$

Montrer que :

$$\psi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^x \Lambda(n) \mathbf{1}_{[n, \infty[}(u) du.$$

(l) Montrer que :

$$\psi_1(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n) \cdot (x - n).$$

(m) Montrer que pour tout $\delta > 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ converge normalement dans $\{\operatorname{Re} s > 1 + \delta\}$.

(n) Montrer que :

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds.$$

Exercice 3. Soit $\tau \in \mathbb{C}$ fixé avec $\operatorname{Im} \tau > 0$.

(a) Montrer que la *fonction Thêta de Jacobi* définie par :

$$\Theta_{\tau}(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau} e^{2i\pi n z} \quad (z \in \mathbb{C}),$$

est une fonction holomorphe entière. **Indication:** Poser $t := \operatorname{Im} \tau > 0$, et observer que pour $\frac{4|z|}{t} \leq |n|$, on a $-n^2 t + 2|n||z| \leq -n^2 \frac{t}{2}$.

(b) Montrer qu'il existe deux constantes $0 < A, B < \infty$ telles que :

$$|\Theta_{\tau}(z)| \leq A e^{B|z|^2} \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

(c) Montrer que la fonction :

$$f(z) := z + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2 \tau} \frac{e^{2i\pi n z}}{2i\pi n}$$

est une fonction holomorphe entière *non constante*. **Indication:** Observer que $f(x) \rightarrow \infty$ lorsque $\mathbb{R} \ni x \rightarrow \infty$.

(d) Montrer que Θ_τ n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{C}$. **Indication:** Vérifier que $f' = \Theta_\tau$.

(e) Montrer que $\Theta_\tau(z + m\tau) = e^{-i\pi m^2 \tau} e^{-2i\pi m z} \Theta_\tau(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $m \in \mathbb{Z}$.

(f) Montrer que Θ_τ est une fonction holomorphe entière d'ordre exactement égal à 2.

2. Corrigé de l'examen 2

Exercice 1. (a) Le pôle unique au dénominateur $\frac{1}{\bar{w}}$ est de module $\frac{1}{|\bar{w}|} > 1$, puisque $w \in \mathbb{D}$, donc :

$$\varphi_w \in \mathcal{O}\left(\mathbb{D}_{\frac{1}{|\bar{w}|}}(0) \supset \overline{\mathbb{D}}\right),$$

ce qui montre un peu mieux : φ_w est holomorphe (donc continue) dans un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}$.

(b) Avec $z\bar{z} = 1$, on calcule :

$$\begin{aligned} |1 - \bar{w}z| &= |1 - w\bar{z}| \\ &= |z(1 - w\bar{z})| \\ &= |z - w|, \end{aligned}$$

d'où en divisant $|\varphi_w(z)| = 1$. Enfin, comme φ_w est holomorphe dans $\mathbb{D}$ et continue jusqu'au bord, le principe du maximum donne :

$$|\varphi_w(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial\mathbb{D}} |\varphi_w(\zeta)| = 1 \quad (\forall |z| \leq 1),$$

et comme φ_w n'est pas constante :

$$|\varphi_w(z)| < 1 \quad (\forall |z| < 1).$$

(c) Comme $|\bar{z}_n| < 1$, l'inégalité standard $|1 - a| \geq 1 - |a|$ valable pour $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| < 1$ donne :

$$\begin{aligned} |1 - \bar{z}_nz| &\geq 1 - |\bar{z}_n||z| \\ &\geq 1 - |z|, \end{aligned}$$

puis en inversant :

$$\frac{1}{|1 - \bar{z}_nz|} \leq \frac{1}{1 - |z|}.$$

Ensuite, avec $z \in \mathbb{D}$ fixé, calculons et simplifions la différence :

$$\begin{aligned} F_n(z) - 1 &= \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_nz} - 1 \\ &= \frac{|z_n|(z_n - z) - z_n(1 - \bar{z}_nz)}{z_n(1 - \bar{z}_nz)} \\ &= \frac{z_n(|z_n| - 1) + z(|z_n|^2 - |z_n|)}{z_n(1 - \bar{z}_nz)} \\ &= (|z_n| - 1) \frac{z_n + z|z_n|}{z_n(1 - \bar{z}_nz)}, \end{aligned}$$

puis majorons-la en utilisant le préliminaire :

$$\begin{aligned} |F_n(z) - 1| &\leq (1 - |z_n|) \frac{|z_n| (1 + |z|)}{|z_n| |1 - \bar{z}_n z|} \\ &\leq (1 - |z_n|) \frac{1 + |z|}{1 - |z|}. \end{aligned}$$

(d) Si $K \subset \mathbb{D}$ est un compact, il existe $0 \leq r < 1$ avec $K \subset \overline{\mathbb{D}}_r$, et alors pour tout $z \in K$, ce qui précède permet de majorer :

$$|F_n(z) - 1| \leq (1 - |z_n|) \frac{1 + r}{1 - r} \quad (\forall z \in K, \forall n \geq 1),$$

au moyen d'une série par hypothèse convergente :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) \frac{1 + r}{1 - r} < \infty,$$

donc un théorème du cours offre la convergence du produit infini vers une certaine fonction holomorphe dans le disque unité :

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z) =: F(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{D}).$$

(e) Grâce à la Question (b), en observant que :

$$F_n(z) = \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} = - \frac{|z_n|}{z_n} \varphi_{z_n}(z),$$

on a unimodularité au bord :

$$|F_n(z)| = 1 \quad (\forall |z| = 1),$$

et comme F_n est holomorphe dans $\mathbb{D}$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, le principe du maximum donne :

$$|F_n(z)| \leq 1 \quad (\forall |z| \leq 1).$$

Tout produit fini $F_1(z) \cdots F_N(z)$ satisfait aussi cela, donc à la limite quand $N \rightarrow \infty$:

$$|F(z)| \leq 1 \quad (\forall |z| = 1).$$

(f) Comme chaque $F_n(z)$ s'annule précisément en l'unique point $z = z_n$, le théorème fondamental sur les produits infinis garantit que :

$$\{w \in \mathbb{D} : F(w) = 0\} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Ainsi, nous venons de démontrer l'existence d'une fonction holomorphe *bornée* $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap L^{\infty}(\overline{\mathbb{D}})$ qui s'annule *précisément* sur une suite infinie $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, sous l'hypothèse cruciale que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

(g) La fonction holomorphe $z \mapsto f(z) - w$ dans $\mathbb{D}$ non identiquement nulle (puisque f est non constante) doit avoir, d'après le principe des zéros isolés, une collection $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de zéros qui est *discrète* dans $\mathbb{D}$, c'est-à-dire sans point d'accumulation dans $\mathbb{D}$, et donc, si

cette collection est infinie comme on l'a supposé, nécessairement, elle s'évade vers le bord $\partial\mathbb{D}$:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(z_n, \partial\mathbb{D}).$$

(h) La question **(b)** a fait voir que $\varphi_w: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, donc par composition $\varphi_w \circ f: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$.

(i) Cette fonction composée :

$$g(z) = \varphi_w(f(z)) = \frac{f(z) - w}{1 - \bar{w}f(z)},$$

s'annule aux points de la suite $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, car :

$$g(z_n) = \frac{f(z_n) - w}{1 - \bar{w}f(z_n)} = 0 \quad (\forall n \geq 1).$$

Or le produit fini $B_N(z)$ s'annule exactement aux points $z_1, \dots, z_N$, et nulle part ailleurs. Par conséquent, le quotient :

$$\frac{g(z)}{B_N(z)} =: h_N(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$$

n'a que des singularités illusoires en $z_1, \dots, z_N$, donc définit bien une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$.

(j) Quel que soit $|z| = 1$, on sait que :

$$|B_N(z)| = |\varphi_{z_1}(z)| \cdots |\varphi_{z_N}(z)| = 1 \cdots 1 = 1,$$

donc le résultat tombe par continuité.

(k) Toujours sur les cercles $\{|z| = r_\varepsilon\}$, comme $|g(z)| < 1$ grâce à la Question **(h)**, on majore :

$$\begin{aligned} |h_N(z)| &\leq \frac{|g(z)|}{|B_N(z)|} \\ &\leq \frac{1}{1 - \varepsilon} \end{aligned} \quad (\forall |z| = r_\varepsilon),$$

d'où en appliquant le principe du maximum sur $\overline{\mathbb{D}_{r_\varepsilon}}$:

$$|h_N(0)| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

et enfin, en laissant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$:

$$|h_N(0)| \leq 1.$$

(l) Ce qui précède implique :

$$\begin{aligned} 0 < |w| &= |g(0)| \\ &= |B_N(0) h_N(0)| \\ &\leq |B_N(0)| \cdot 1 \\ &= |z_1| \cdots |z_N|, \end{aligned}$$

et en inversant puis en appliquant la fonction logarithme :

$$\log \frac{1}{|w|} \geq \sum_{n=1}^N \log \frac{1}{|z_n|}.$$

Enfin, laissons $N \rightarrow \infty$ pour obtenir la réponse :

$$\log \frac{1}{|w|} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|}.$$

(m) Ainsi, nous venons d'obtenir la convergence de la série à termes positifs :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|} \leq \log \frac{1}{|w|} < \infty.$$

Comme $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ avec $|z_n| < 1$ d'après la Question (g), on a pour tous $n \geq 1$:

$$0 < |z_n| < 1 \quad (\forall n \geq 1).$$

Vérifions, pour tout x réel avec $0 < x \leq 1$, que :

$$1 - x \leq \log \frac{1}{x}.$$

En effet, la fonction auxiliaire $\lambda(x) := -1 + x + \log \frac{1}{x}$ admet, sur $]0, 1[$, une dérivée négative :

$$\lambda'(x) = 1 - \frac{1}{x} < 0,$$

et comme $\lambda(1) = 0$, elle doit avoir des valeurs strictement positives sur $]0, 1[$, décroissant jusqu'à $\lambda(1) = 0$.

Grâce à cela :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|} < \infty.$$

(n) Cette fonction auxiliaire $f(z)$ satisfait $f(0) = 0$. En les zéros z_n de F , on a :

$$F(z_n) = 0 \implies f(z_n) = \frac{0 - F(0)}{1 - \overline{F(0)}F(z_n)} = -F(0) =: w \in \mathbb{D} \setminus \{0\},$$

De plus, $f(z) = w$ s'écrit :

$$\frac{F(z) - F(0)}{1 - \overline{F(0)}F(z)} = -F(0) \implies F(z) = 0,$$

donc $f^{-1}(w) = \{F = 0\} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, et ainsi, tout ce qui précède s'applique !

(o) En divisant $F(z)$ par M , on se ramène à $M = 1$. Si $F(z) = z^{\nu} \cdot G(z)$ avec $G(0) \neq 0$ et $\nu \geq 1$, on peut appliquer ce qui précède à $G(z)$.

(p) Le résultat obtenu donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite infinie $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n \in \mathbb{D}$ discrète dans $\mathbb{D}$ soit l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe bornée dans $\mathbb{D}$, ce qui rappelle le théorème de Weierstrass, mais avec une hypothèse supplémentaire inévitable, et explicite.

Théorème. Soit $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de points dans $\mathbb{D}$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$ — ce qui implique sa discrétion dans $\mathbb{D}$. Alors il existe une fonction :

$$B \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap H^{\infty}(\mathbb{D})$$

holomorphe dans $\mathbb{D}$ et bornée ≤ 1 ayant exactement ces z_n comme zéros, et non nulle partout ailleurs.

Inversement, si une fonction holomorphe bornée :

$$F \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap H^\infty(\mathbb{D})$$

est non identiquement nulle, et si elle a une infinité de zéros $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ répétés avec multiplicités, alors $\sum_{n=1}^\infty (1 - |z_n|) < \infty$.

Dans la première partie de l'énoncé, par rapport aux Questions (c) à (f) où on a supposé tous les $z_n \neq 0$ non nuls, il faut factoriser à l'avance par z^ν avec $\nu \geq 0$ entier pour tenir compte de l'existence éventuelle de zéros à l'origine, ce qui se généralise sans peine.

Exercice 2. (a) D'après Euler, on a la représentation par un produit normalement convergent sur $\{\operatorname{Re} s > 1 + \delta\}$ quel que soit $\delta > 0$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Avec $s \in \mathbb{R}$ réel, $s > 1$, en prenant le logarithme et en utilisant le développement en série entière $-\log(1 - t) = \sum_{m=1}^\infty \frac{t^m}{m}$, nous obtenons bien :

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \sum_{p \in \mathcal{P}} -\log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}. \end{aligned}$$

(b) Dans le produit infini $\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$ dont tous les facteurs $\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \neq 0$ ne s'annulent jamais dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$, puisque $|p^s| = p^{\operatorname{Re} s} > 1$, un théorème du cours assure que :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \neq 0 \quad (\forall \operatorname{Re} s > 1).$$

Ensuite, comme le demi-plan $\{\operatorname{Re} s > 1\}$ est simplement connexe, un théorème du cours montre l'existence de $s \mapsto \log \zeta(s)$, holomorphe, avec $\log \zeta(s) \in \mathbb{R}$ quand $\zeta(s) \in \mathbb{R}$, notamment pour $s \in]1, \infty[$.

(c) Comme $s \mapsto \log \zeta(s)$ et la fonction :

$$s \mapsto \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}},$$

sont toutes deux holomorphes dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$, et comme elles coïncident, d'après la Question (a), sur le segment :

$$]1, \infty[\subset \{\operatorname{Re} s > 1\},$$

qui a des points d'accumulation dans l'ouvert $\{\operatorname{Re} s > 1\}$, le principe d'unicité garantit qu'elles coïncident partout.

(d) Comme $\zeta(s)$ est holomorphe et $\neq 0$ dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$ d'après le cours, on peut dériver terme à terme la série double normalement convergente qui précède en utilisant :

$$(p^{-ms})' = (e^{-ms \log p})' = -m \log p e^{-ms \log p} = -m \log p \cdot p^{-ms},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (-m \log p) \frac{1}{p^{ms}} \\
 &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ms}} \\
 \text{[Reconnaître } \Lambda] \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.
 \end{aligned}$$

(e) En effet, grâce à $|a^s| = a^{\operatorname{Re} s} = a^c$ sur cette droite, majorons :

$$|I(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^c}{|c+it| \cdot |c+1+it|} |idt|,$$

puis en utilisant :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|c+it|} &= \frac{1}{(c^2+t^2)^{1/2}}, \\
 \frac{1}{|c+1+it|} &= \frac{1}{((c+1)^2+t^2)^{1/2}} \leq \frac{1}{(c^2+t^2)^{1/2}},
 \end{aligned}$$

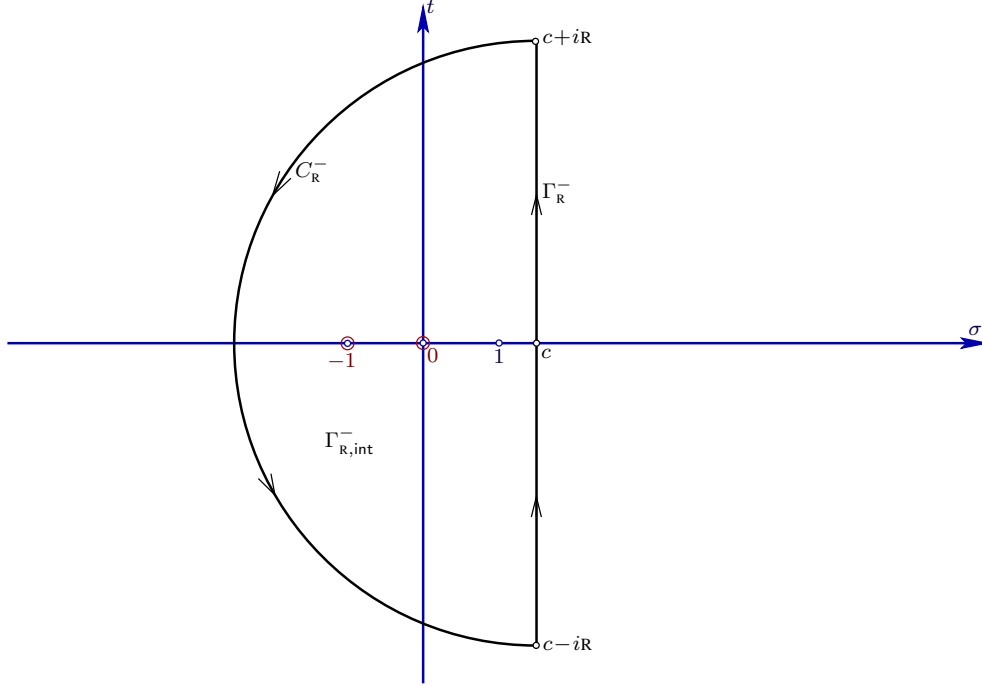
constatons la finitude :

$$\begin{aligned}
 |I(a)| &\leq \frac{a^c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{c^2+t^2} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

(f) Élémentaire, mon cher Merker :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}_f(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{a^s}{s(s+1)} = 1, \\
 \operatorname{Res}_f(-1) &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \cdot \frac{a^s}{s(s+1)} = \frac{a^{-1}}{-1} = -\frac{1}{a}.
 \end{aligned}$$

(g) Voici un dessin complet, qui incorpore axes, flèches, et points remarquables.



(h) Comme les deux (seules) singularités $s = 0$ et $s = 1$ de $f(s) = \frac{a^s}{s(s+1)}$ se trouvent à l'intérieur $\Gamma_{R,int}^-$ de ce contour, puisque $R > 1 + c$, le théorème des résidus donne, grâce à la Question (f) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R^-} f(s) ds &= \text{Res}_f(0) + \text{Res}_f(-1) \\ &= 1 - \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

(i) En paramétrant C_R^- par $s = c + R e^{i\theta}$ avec $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, on transforme :

$$\begin{aligned} s(s+1) &= (c + R e^{i\theta})(c + 1 + R e^{i\theta}) \\ &= e^{2i\theta} (c e^{-i\theta} + R)((c+1) e^{-i\theta} + R), \end{aligned}$$

d'où :

$$|s(s+1)| \geq \frac{1}{2} R^2 \quad (\forall R \geq R_c \gg 1).$$

Ensuite, comme on a $\text{Re } s \leq c$ quel que soit $s \in C_R^-$, d'où découle puisque $a \geq 1$:

$$|a^s| = a^{\text{Re } s} \leq a^c \quad (\forall s \in C_R^-),$$

nous pouvons majorer et conclure :

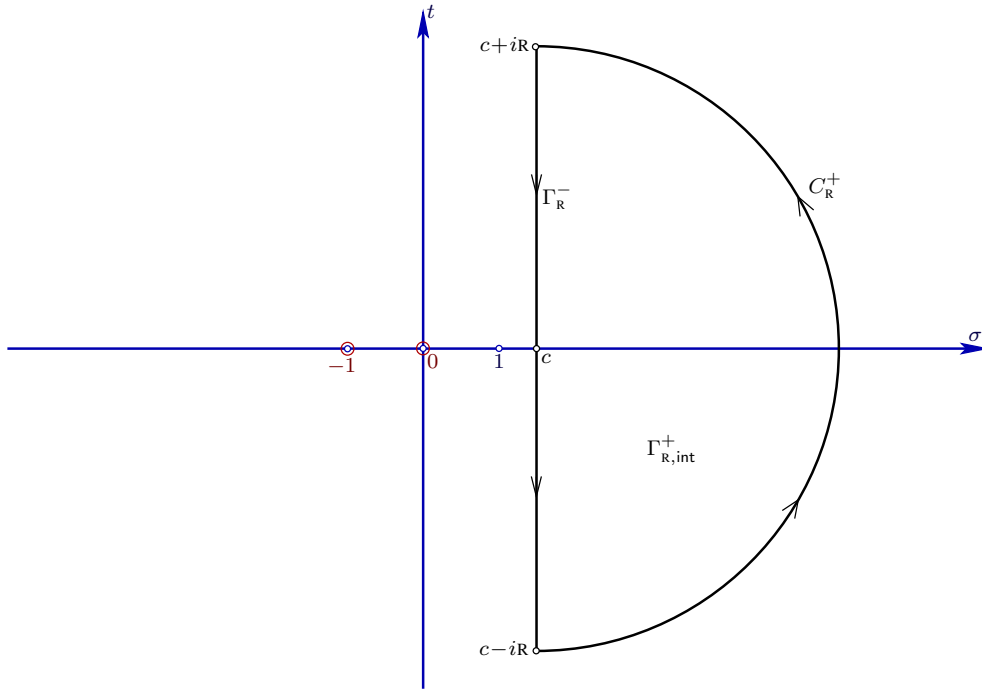
$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R^-} \frac{a^s}{s(s+1)} ds \right| &\leq \frac{a^c}{2\pi} \int_{C_R^-} \frac{|ds|}{|s(s+1)|} \\ &\leq \frac{a^c}{2\pi} \frac{\pi R}{\frac{1}{2} R^2} \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

(j) Tout d'abord, pour le premier cas où $1 \leq a$, en faisant $R \rightarrow \infty$ dans la formule des résidus obtenue à la Question (h) :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{[c-iR, c+iR]} \frac{a^s}{s(s+1)} ds + \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{C_R^-} \frac{a^s}{s(s+1)} ds}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0} = 1 - \frac{1}{a},$$

nous obtenons bien grâce à la Question (i) qui précède :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)} ds = 1 - \frac{1}{a}.$$



Supposons maintenant que $0 < a \leq 1$. Si nous prenons le demi-cercle C_R^+ centré en c mais situé à *droite* de la verticale $\{\operatorname{Re} s = c\}$, et si Γ_R^+ est le contour analogue contenant le segment $[c+iR, c-iR]$ parcouru cette fois-ci *du haut vers le bas*, la fonction $s \mapsto \frac{a^s}{s(s+1)}$ n'a plus aucun pôle dans l'intérieur $\Gamma_{R,int}^+$, donc le théorème des résidus donne :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R^+} \frac{a^s}{s(s+1)} ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{[c+iR, c-iR]} \frac{a^s}{s(s+1)} ds + \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{C_R^+} \frac{a^s}{s(s+1)} ds}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0}, \end{aligned}$$

et une estimation analogue à celle conduite par la Question (i) en tenant compte du fait que $\operatorname{Re} s \geq c$ pour tout $s \in C_R^+$ implique toujours $|a^s| = e^{\operatorname{Re} s} \leq a^c$ car maintenant $0 < a \leq 1$, donne bien ce qui était demandé :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)} ds.$$

(k) Observons d'abord que pour $u \geq 1$ réel :

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \sum_{1 \leq n \leq u} \Lambda(n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \mathbf{1}_{[n, \infty[}(u),\end{aligned}$$

puis insérons :

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \int_1^x \psi(u) du \\ &= \int_1^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \mathbf{1}_{[n, \infty[}(u) \right) du \\ \text{[Somme finie]} \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \int_1^x \mathbf{1}_{[n, \infty[}(u) du.\end{aligned}$$

(l) Continuons en décomposant :

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n) \int_1^x \mathbf{1}_{[n, \infty[}(u) du + \sum_{n > x} \Lambda(n) \underbrace{\int_1^x \mathbf{1}_{[n, \infty[}(u) du}_0 \\ &= \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n) \cdot (x - n) + 0.\end{aligned}$$

(m) Tout d'abord, une majoration du type :

$$\log n \leq \text{constante}_\varepsilon \cdot n^\varepsilon \quad (\forall n \geq 1),$$

valable pour tout $\varepsilon > 0$, montre, grâce au critère de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\kappa} < \infty$ vrai pour tout $\kappa > 1$, que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+\delta}} < \infty.$$

Observons par ailleurs, en revenant à la définition donné par la Question (d), que :

$$|\Lambda(n)| \leq \log n \quad (\forall n \geq 1).$$

Par conséquent, nous avons bien convergence normale :

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^{\operatorname{Re} s}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+\delta}} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

(n) Avec $a := \frac{x}{n}$, tout ce qui précède permet en effet d'intervertir sommation et intégration pour calculer :

$$\begin{aligned}
 \psi_1(x) &= \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n) x \left(1 - \frac{n}{x}\right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) x \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} ds \\
 [c > 1] \quad &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds.
 \end{aligned}$$

Exercice 3. (a) Avec $t > 0$, on a bien (facilement !) :

$$\begin{aligned}
 \frac{4|z|}{t} \leq |n| \quad \implies \quad -n^2 t + 2|n||z| &\leq -n^2 t + 2|n| \frac{t}{4} |n| \\
 (*) \quad &= -n^2 \frac{t}{2}.
 \end{aligned}$$

Grâce à cela, et à l'inégalité élémentaire $|e^{2i\pi n z}| \leq e^{2\pi |n||z|}$, pour démontrer que la série infinie de fonctions holomorphes qui définit $\Theta_\tau(z)$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_R$ de rayon $R \gg 1$ arbitrairement grand, majorons, pour $|z| \leq R$, en découpant la somme en deux morceaux :

$$\begin{aligned}
 |\Theta_\tau(z)| &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 \tau} e^{2i\pi n z} \right| \\
 [\operatorname{Im} \tau = t] \quad &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t + 2\pi |n||z|} \\
 (*) \quad &\leq \sum_{|n| < \frac{4|z|}{t}} e^{-\pi n^2 t + 2\pi |n|R} + \sum_{\frac{4|z|}{t} \leq |n|} e^{-\pi n^2 \frac{t}{2}} \\
 &\leq \text{constante}(R) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{t}{2}} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Un théorème du cours dû à Cauchy offre l'holomorphie de Θ_τ sur $\mathbb{D}_R$, donc dans $\mathbb{C}$ tout entier, puisque $R \gg 1$ était arbitraire.

(b) Reprenons cette majoration en analysant mieux le premier terme :

$$\begin{aligned}
 |\Theta_\tau(z)| &\leq \sum_{|n| < \frac{4|z|}{t}} e^{-\pi n^2 t + 2\pi |n| |z|} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{t}{2}} \\
 &\leq \sum_{|n| < \frac{4|z|}{t}} e^{-\pi n^2 t + 2\pi \frac{4|z|}{t} |z|} + \text{même constante} \\
 [-\pi n^2 t \leq -\pi n^2 \frac{t}{2}] &\leq e^{\frac{8\pi |z|^2}{t}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{t}{2}} + \text{même constante} \right),
 \end{aligned}$$

d'où le résultat en prenant :

$$B := \frac{8\pi}{t} \quad \text{et} \quad A := 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{t}{2}}.$$

Ainsi, cette inégalité $|\Theta_\tau(z)| \leq A e^{B|z|^2}$ dit que Θ_τ est d'ordre ≤ 2 .

(c) Pour cette fonction :

$$f(z) := z + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2 \tau} \frac{e^{2i\pi n z}}{2i\pi n},$$

de toute façon, comme $\frac{1}{2\pi|n|} \leq 1$, cela améliore les inégalités de la Question (a), donc f est aussi holomorphe entière.

Pour $z = x \in \mathbb{R}$, clairement, le premier terme z de $f(z)$ tend vers l'infini quand $x \rightarrow \infty$, tandis que la (grosse) série demeure en fait bornée (!) :

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2 \tau} \frac{e^{2i\pi n x}}{2i\pi n} \right| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{-\pi n^2 t} \frac{1}{2\pi|n|} \\
 &=: E < \infty,
 \end{aligned}$$

donc on a bien :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} (x - E) = \infty.$$

Par conséquent, cette fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est *non constante*.

(d) Comme cette série $f(z)$ de fonctions holomorphes converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$, on peut la dériver terme à terme pour reconnaître :

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2 \tau} \frac{2i\pi n e^{2i\pi n z}}{2i\pi n} \\
 [\text{Kaboom !}] &= \Theta_\tau(z).
 \end{aligned}$$

Comme f est non constante, Θ_τ est *non identiquement nulle*.

(e) En effet, transformons $\Theta_\tau(z + m\tau)$ en cherchant à faire apparaître $\Theta_\tau(z)$, grâce à une translation de la variable de sommation :

$$\begin{aligned}
 \Theta_\tau(z + m\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau} e^{2i\pi n(z+m\tau)} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau + 2i\pi nm\tau} e^{2i\pi nz} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi [(n+m)^2 - m^2] \tau} e^{2i\pi [n+m-m]z} \\
 [n+m=:k] \quad &= e^{-i\pi m^2 \tau} e^{-2i\pi mz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\pi k^2 \tau} e^{2i\pi kz} \\
 &= e^{-i\pi m^2 \tau} e^{-2i\pi mz} \Theta_\tau(z).
 \end{aligned}$$

(f) D'après la Question (b), l'ordre de Θ_τ est ≤ 2 .

Par l'absurde, supposons que cet ordre est < 2 , à savoir, supposons l'existence de $\rho < 2$ et de deux constantes tels que :

$$C e^{\mathbb{D}|z|^\rho} \geq |\Theta_\tau(z)| \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Comme $\Theta_\tau \not\equiv 0$, le principe des zéros isolés fournit un $x_0 \in \mathbb{R}$ réel en lequel $\Theta_\tau(x_0) \neq 0$. Alors en appliquant l'égalité qui précède aux points $x_0 + m\tau$ avec $m \in \mathbb{Z}$ quelconque, nous obtenons une minoration :

$$\begin{aligned}
 C e^{\mathbb{D}|x_0+m\tau|^\rho} &\geq |\Theta_\tau(x_0 + m\tau)| \\
 &= \left| e^{-i\pi m^2 \tau} e^{-2i\pi m x_0} \Theta_\tau(x_0) \right| \\
 &= e^{\pi m^2 t} \cdot 1 \cdot |\Theta_\tau(x_0)|,
 \end{aligned}$$

qui se métamorphose en une contradiction quand $m \rightarrow \infty$, car $m \mapsto m^\rho$ à gauche croît moins rapidement que $m \mapsto m^2$ à droite.